Übungsblatt 10

37. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Ziel dieser Aufgabe ist es zu zeigen, dass $O(V)$ „von den Spiegelungen an Hyperebenen – den Abbildungen $s_{e^\perp}$ aus Aufgabe 33 – erzeugt wird“. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

- a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass es für je zwei Vektoren $v, w \in V$ mit $\|v\| = \|w\| = 1$ und $v \neq w$ eine Spiegelung $s_{x^\perp} : V \rightarrow V$ gibt mit $s_{x^\perp}(v) = w$.
- b) (2 Punkte) Zeigen Sie induktiv, dass es für je zwei orthonormale Familien $\mathcal{A} := (v_1, \dots, v_n)$ und $\mathcal{B} := (w_1, \dots, w_n)$ in V Spiegelungen $s_{x_1^\perp}, \dots, s_{x_m^\perp}$ mit $m \leq n$ gibt, sodass

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}: (s_{x_m^\perp} \circ \dots \circ s_{x_1^\perp})(v_j) = w_j.$$

- c) (1 Punkt) Folgern Sie, dass jedes $F \in O(V)$ als Verkettung von m Spiegelungen $s_{x_1^\perp}, \dots, s_{x_m^\perp}$ mit $m \leq \dim_{\mathbb{R}}(V)$ geschrieben werden kann.

38. Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum und $F \in \text{End}_{\mathbb{R}}(V)$.

- a) (1 Punkt) Zeigen Sie: Wenn V eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ hat, sodass

$$M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} E_{m^+} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -E_{m^-} & & & \vdots \\ \vdots & & A_1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

mit $m^+, m^-, r \in \mathbb{N}$ und $A_j = \begin{pmatrix} \cos(\alpha_j) & -\sin(\alpha_j) \\ \sin(\alpha_j) & \cos(\alpha_j) \end{pmatrix}$ mit $\alpha_j \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ wie in **Theorem 6.1.9**, dann ist F orthogonal.

- b) (3 Punkte) Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Euklidischen Standardskalarprodukt versehen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F_A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

orthogonal ist, bestimmen Sie eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^4$, sodass die darstellende Matrix die von **Theorem 6.1.9** geforderte Normalform hat, und geben Sie diese darstellende Matrix an.

39. Wir wollen die Abstand erhaltenden Abbildungen des $\mathbb{R}^3$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt verstehen.

- a) (1 Punkt) Zeigen Sie: Jeder orthogonale Endomorphismus $F \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ mit $\det(F) = 1$ besitzt 1 als Eigenwert, jeder mit $\det(F) = -1$ einen Eigenwert -1 .
- b) (2 Punkte) Zeigen Sie: Für jeden orthogonalen Endomorphismus F mit $\det(F) = 1$ gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ und eine Zahl $\alpha \in [0, 2\pi[$, sodass

$$M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

Für jeden orthogonalen Endomorphismus F mit $\det(F) = -1$ gibt es eine Orthonormalbasis $\mathcal{A}$ und eine Zahl $\alpha \in [0, 2\pi[$, sodass

$$M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

- c) (1 Punkt) Interpretieren Sie diese Befunde geometrisch mit Hilfe der Begriffe „Spiegelung“ und „Drehung“.

40. a) (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Betrachten Sie die Bilinearform

$$s_{A_n}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \mapsto 2 \sum_{j=1}^n x_j y_j - \sum_{j=1}^{n-1} x_j y_{j+1} - \sum_{j=1}^{n-1} x_{j+1} y_j.$$

Berechnen Sie die Determinante der darstellenden Matrix von s_{A_n} bezüglich der Standardbasis und zeigen Sie, dass s_{A_n} für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ positiv definit ist.

- b) (2 Punkte) Folgern Sie: Die „Cartan-Matrix von E_8 “,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{\mathbb{R}}(8 \times 8),$$

ist ebenfalls positiv definit.

Abgabetermin: Donnerstag, 07. Juli 2016, um 08:00 Uhr