Prof. Dr. Katrin Wendland
Dipl.-Math. M.A. Maximilian Gerhards
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra II

SS 2016

Übungsblatt 9

Bemerkung: Auf diesem Blatt sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

33. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum und $e \in V$ ein Einheitsvektor, also $\|e\| = 1$.
Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{array}{rccl} s_{e^\perp}: & V & \to & V \\ & x & \mapsto & x - 2\langle x, e\rangle e \end{array}$$

a) (1 Punkt) Zeigen Sie: $s_{e^\perp}$ ist ein orthogonaler oder unitärer Endomorphismus.

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $s_{e^\perp}$ und berechnen Sie im Falle $\dim(V) < \infty$ die Determinante $\det(s_{e^\perp})$.

c) (1 Punkt) Sei nun $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt. Betrachten Sie für zwei Einheitsvektoren e und e' die Komposition $s_{e'^\perp} \circ s_{e^\perp}$ und berechnen Sie für diese Abbildung Eigenwerte und Eigenvektoren.

d) (1 Punkt) Welche geometrische Bedeutung haben Ihre Befunde? Stellen Sie auch einen Bezug zu s_v aus Aufgabe 17 her.

34. a) (1 Punkt) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:
Für $S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ gilt:

$$\mathrm{O}(n) \setminus \mathrm{SO}(n) = \{AS \mid A \in \mathrm{SO}(n)\}.$$

b) (2 Punkte) Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2 \times 2)$. Zeigen Sie:

$$A \in \mathrm{SO}(2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in [0, 2\pi[\colon A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$A \in \mathrm{O}(2) \setminus \mathrm{SO}(2) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \alpha \in [0, 2\pi[\colon A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

(Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\cos : [0, 2\pi[\to [-1, 1]$ und $\sin : [0, 2\pi[\to [-1, 1]$ surjektiv sind und für alle $x \in [0, 2\pi[$ die Relationen $\cos(2\pi - x) = \cos(x)$, $\sin(2\pi - x) = -\sin(x)$ und $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$ erfüllen.)

c) (1 Punkt) Sei $A \in \mathrm{O}(2)$, $f = F_A$ und $f_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$ wie in Aufgabe 19. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von $f_{\mathbb{C}}$.

35. Sei $A \in \mathrm{SO}(2)$ und seien λ und $\bar{\lambda}$ die komplexen Eigenwerte von A.

a) (2 Punkte) Sei $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a + ib$ der Standard-Vektorraum-isomorphismus. Zeigen Sie: Es gibt eine komplexe Zahl z mit

$$\forall x \in \mathbb{C}: \quad (I \circ F_A \circ I^{-1})(x) = zx \in \mathbb{C}$$

und für dieses z gilt: $z \in \{\lambda, \bar{\lambda}\}$.

b) (1 Punkt) Finden Sie eine $\mathbb{R}$-Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{C}^2$, bezüglich derer die Abbildung $F\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \bar{\lambda} y \end{pmatrix}$ die darstellende Matrix

$$M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(4 \times 4)$$

besitzt.

c) (1 Punkt) Finden Sie eine $\mathbb{R}$-Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^2$, bezüglich derer die Abbildung $G\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die darstellende Matrix

$$M(\mathcal{B}, G, \mathcal{B}) = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(4 \times 4)$$

besitzt.

36. Sei $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $(v_1, \dots, v_n)$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Wir definieren $U^{\mathbb{C}}$ als den $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $\mathbb{C}$-Basis $(v_1, \dots, v_n)$. Für jeden Endomorphismus $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(U)$ definieren wir die Abbildung $F_{\mathbb{C}}\colon U^{\mathbb{C}} \to U^{\mathbb{C}}$ über $F_{\mathbb{C}}\colon \sum_{i=1}^n x_i v_i \mapsto \sum_{i=1}^n x_i F(v_i)$.
Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) Ist $(v_1', \dots, v_n')$ eine weitere Basis von U, so ist $(v_1', \dots, v_n')$ auch eine $\mathbb{C}$-Basis von $U^{\mathbb{C}}$.

b) (1 Punkt) Durch $\langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i \bar{y}_j \langle v_i, v_j \rangle$ für alle $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ und $y = \sum_{i=1}^n y_i v_i$ wird ein Skalarprodukt auf $U^{\mathbb{C}}$ definiert.

c) (1 Punkt) $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(U)$ ist genau dann ein orthogonaler Endomorphismus auf $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, wenn $F_{\mathbb{C}}$ ein unitärer Endomorphismus auf $(U^{\mathbb{C}}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}})$ ist.

d) (1 Punkt) Sei $F \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(U)$ und seien $u := u_1 + iu_2$, $\bar{u} := u_1 - iu_2$ mit $u_1, u_2 \in U$. Ist $W := \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(u, \bar{u})$ ein $F_{\mathbb{C}}$-invarianter $\mathbb{C}$-Untervektorraum (d.h. $\forall w \in W\colon F_{\mathbb{C}}(w) \in W$), so ist $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(u_1, u_2)$ F-invariant.

Abgabetermin: Donnerstag, 30. Juni 2016, um 08:00 Uhr