Prof. Dr. Katrin Wendland
Dipl.-Math. M.A. Maximilian Gerhards
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra II

SS 2016

Übungsblatt 8

Bemerkung: Auf diesem Blatt sei stets $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

29. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum.

    a) (1 Punkt) Zeigen Sie: Für jeden Untervektorraum U von V ist auch $U^\perp$ ein Untervektorraum.

    b) (3 Punkte) Sei nun $V = \mathbb{R}[X]_d$ der Vektorraum der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ mit Grad höchstens d.
    Wir definieren das Integral eines Polynoms $f := \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ in den Grenzen $a, b \in \mathbb{R}$ als

    $$\int_a^b f dx := \left(\sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{k+1} b^{k+1}\right) - \left(\sum_{k=0}^n a_k \frac{1}{k+1} a^{k+1}\right).$$

    Zeigen Sie, dass durch

    $$\langle f, g\rangle_{\mathcal{L}^2} = \int_{-1}^1 fg dx$$

    ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[X]_d$ definiert wird, und berechnen Sie $(\mathrm{Span}_{\mathbb{R}}(1))^\perp$.
    Sie dürfen dabei ohne Beweis verwenden, dass

    $$\forall f \in \mathbb{R}[X]_d \setminus \{0\}\colon \quad (\forall x \in [-1,1]\colon f(x) \geq 0) \quad \Rightarrow \quad \int_{-1}^1 f dx > 0.$$

30. Sei $(\mathbb{R}[X]_d, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2})$ wie in Aufgabe 29 b) und $\mathcal{B}_d := (q_0, q_1, \ldots, q_d)$ mit $q_i = X^i$ für $i \in \{0, \ldots, d\}$ die bekannte Basis von $\mathbb{R}[X]_d$.

    a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{L}^2}$ bezüglich $\mathcal{B}_d$.

    b) (3 Punkte) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die Basis $\mathcal{B}_4$ an, um eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}[X]_4$ zu erhalten.

31. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler Euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum, $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit dem durch Einschränkung gewonnenen Skalarprodukt und $\iota\colon W \to V$ die natürliche Inklusionsabbildung.

    a) (1 Punkt) Zeigen Sie:

    $$\forall \alpha \in V^*\colon \quad \iota^\top(\alpha) = \alpha|_W,$$

    wobei $\alpha|_W : w \mapsto \alpha(w)$ die Einschränkung von α auf W ist. Zeigen Sie weiter:

    $$W^\circ := \{\alpha \in V^* \mid \forall w \in W\colon \alpha(w) = 0\} = \ker(\iota^\top).$$

b) (1 Punkt) Zeigen Sie: Die adjungierte Abbildung $\iota^{\mathrm{ad}}\colon V \to W$ ist die einzige Abbildung $f\colon V \to W$ mit

$$\forall v \in V\colon \quad v - (\iota \circ f)(v) \in W^{\perp}.$$

c) (1 Punkt) Zeigen Sie: $\iota^{\mathrm{ad}} \circ \iota = \mathrm{id}_W$. Folgern Sie, dass $\pi := \iota \circ \iota^{\mathrm{ad}}$ die orthogonale Projektion von V auf W ist.

d) (1 Punkt) Sei $V = \mathbb{R}^3$ mit dem Euklidischen Skalarprodukt und $W = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0\right\}$. Finden Sie Basen $\mathcal{A}$ von V und $\mathcal{B}$ von W, sodass $M(\mathcal{B}, \iota^{\mathrm{ad}}, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

32. Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein endlich-dimensionaler unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$ ein selbstadjungierter Endomorphismus.
Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) Ist λ ein Eigenwert von F, dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) (1 Punkt) Sind v_1 und v_2 Eigenvektoren von F zu verschiedenen Eigenwerten λ_1 und λ_2, dann ist $v_1 \perp v_2$.

c) (2 Punkte) Betrachten Sie die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 3 & -i & i \\ i & 5 & -1 \\ -i & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(3 \times 3).$$

Zeigen Sie: Es gibt eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(3 \times 3)$, sodass $S^{-1}BS$ eine Diagonalmatrix ist. Zeigen Sie für eine solche Matrix: $S^{\top}\bar{S}$ ist eine Diagonalmatrix.

Abgabetermin: Donnerstag, 23. Juni 2016, um 08:00 Uhr