Prof. Dr. Katrin Wendland
Dipl.-Math. M.A. Maximilian Gerhards
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra II

SS 2016

Übungsblatt 7

25. Wir betrachten das Kreuzprodukt

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}\right) & \mapsto & \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix} \end{array}$$

und das Euklidische Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^3$.

a) (2 Punkte) Zeigen Sie für $v, w \in \mathbb{R}^3$ beliebig:

$$\big(\forall u \in \mathbb{R}^3 \colon \langle u, u' \rangle = \det(\mathrm{col}(u, v, w))\big) \quad \Leftrightarrow \quad u' = v \times w.$$

Folgern Sie für alle $v, w \in \mathbb{R}^3$: $(v \times w) \perp v$ und $(v \times w) \perp w$.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie: Für jede bezüglich der Standardorientierung des $\mathbb{R}^3$ positiv orientierte Orthonormalbasis $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ist

$$M(\mathcal{A}, \mathcal{E}^{(3)}) \in \mathrm{SO}(3).$$

c) (1 Punkt) Folgern Sie: Für jede bezüglich der Standardorientierung des $\mathbb{R}^3$ positiv orientierte Orthonormalbasis $\mathcal{A} = (a_1, a_2, a_3)$ ist

$$a_1 \times a_2 = a_3.$$

26. Wir betrachten wie in Aufgabe 25 das Kreuzprodukt und das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$.
Zeigen Sie:

a) (2 Punkte) $\forall v, w \in \mathbb{R}^3\colon \quad \|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2.$

b) (2 Punkte) $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^3\colon \quad |\det(\mathrm{col}(u, v, w))| \leq \|u\| \|v\| \|w\|$
und Gleichheit gilt genau dann, wenn die Vektoren u, v, w paarweise orthogonal sind oder einer davon 0.
Tipp: Cauchy-Schwarz.

27. Sei $s\colon \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ gegeben durch $s(x, y) := x^\top B \bar{y}$ für

$$B := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1+i \\ -1 & 1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

a) (1 Punkt) Machen Sie sich klar, dass s eine Hermitesche Sesquilinearform ist, und finden Sie die zu s gehörige quadratische Form $q_s\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{R}$.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie für die Basis $\mathcal{B} := (\begin{pmatrix} -2 \\ i \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ -1-i \end{pmatrix})$ des $\mathbb{C}^3$ die darstellende Matrix $B_\mathcal{B}$ von s. (Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathcal{B}$ eine Basis ist.)

c) (2 Punkte) Sei allgemein V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum mit $n := \dim(V) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $s\colon V \times V \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform. Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Basen von V und $B_\mathcal{A}, B_\mathcal{B} \in \mathrm{Mat}_\mathbb{C}(n \times n)$ die darstellenden Matrizen von s zu diesen Basen.
Wie lässt sich $B_\mathcal{B}$ aus $B_\mathcal{A}$ und den Basiswechselmatrizen $M(\mathcal{B}, \mathcal{A})$, $M(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathrm{Mat}_\mathbb{C}(n \times n)$ berechnen (mit Beweis)?

28. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \eta\colon & \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R} \\ & (\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) & \mapsto & -x_0y_0 + x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3. \end{array}$$

und die Matrix

$$H := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) (2 Punkte) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch (mit Beweis)?
   (1) η ist bilinear.
   (2) η ist symmetrisch.
   (3) η ist positiv definit.
   (4) η ist nicht-ausgeartet: $(\forall y \in \mathbb{R}^4\colon \eta(x, y) = 0) \quad \Rightarrow \quad x = 0$.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie für alle $A \in \mathrm{Mat}_\mathbb{R}(4 \times 4)$:

$$\big(\forall x, y \in \mathbb{R}^4\colon \eta(Ax, Ay) = \eta(x, y)\big) \quad \Leftrightarrow \quad A^\top H A = H$$

und finden Sie alle Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_\mathbb{R}(4 \times 4)$ der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit $A^\top H A = H$.

Bemerkung: $\mathbb{R}^4$ mit η wird auch „Minkowski-Raum“ genannt und ist gemäß der speziellen Relativitätstheorie ein mathematisches Modell unseres Universums mit einer Zeit- und drei Raumdimensionen, wenn man annimmt, dass überall ein Vakuum herrscht.

Abgabetermin: Donnerstag, 16. Juni 2016, um 08:00 Uhr