Prof. Dr. Katrin Wendland
Dipl.-Math. M.A. Maximilian Gerhards
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra II

SS 2016

# Übungsblatt 6

21. Gegeben sei der Endomorphismus

$$\begin{array}{cccc} F\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -2x-6y+4z \\ x+4y-2z \\ x+5y-2z \end{pmatrix}. \end{array}$$

   a) (1 Punkt) Zeigen Sie: $F$ ist trigonalisierbar.

   b) (2 Punkte) Finden Sie eine Basis $\mathcal{A}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass $M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3\times 3)$ eine obere Dreiecksmatrix ist.
   **Tipp:** Der Beweis von **Theorem 4.4.14** ist konstruktiv, er liefert einen Algorithmus, um die Basis $\mathcal{A}$ zu finden.

   c) (1 Punkt) Wie lautet die mittlere Spalte der von Ihnen gefundenen Matrix $M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A})$? Gibt es eine Basis $\mathcal{A}'$, sodass $M(\mathcal{A}', F, \mathcal{A}')$ ebenfalls obere Dreiecksgestalt hat, aber die mittlere Spalte nicht dieselbe ist? Welche Form muss diese Spalte für das gegebene $F$ stets haben, solange die darstellende Matrix obere Dreiecksgestalt hat?

22. Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Seien $p \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ gegeben und $L := \{p+tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ die (affine) Gerade mit Stützvektor $p$ und Richtungsvektor $v$.

   a) (1 Punkt) Zeigen Sie: Für jeden Punkt $q \in \mathbb{R}^n$ gibt es genau einen Punkt $x_q \in L$, den Lotfusspunkt von $q$ auf $L$, mit

   $$(q - x_q) \perp v.$$

   b) (1 Punkt) Zeigen Sie weiter: Ist $q \in \mathbb{R}^n$ beliebig und $x_q$ sein Lotfußpunkt auf $L$, so gilt

   $$\forall x \in L \setminus \{x_q\}\colon \quad d(q,x) > d(q,x_q).$$

   Wir definieren also den Abstand von $q$ zu $L$ als

   $$d(q,L) := \min\{d(q,x) \mid x \in L\} = d(q,x_q).$$

   c) (2 Punkte) Sei nun $n = 2$. Zeigen Sie: $L$ lässt sich schreiben als

   $$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid (x-p) \perp s\}$$

   für einen Vektor $s \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$.
   Zeigen Sie für diesen Vektor $s$:

   $$\forall q \in \mathbb{R}^2\colon \quad d(q,L) = \frac{|\langle s, q-p\rangle|}{\|s\|}.$$

   **Tipp:** Zeigen Sie: $q - x_q = \lambda s$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$.

23. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$.
Für beliebige $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}^n$ definieren wir die Matrix

$$B_{a_1,\ldots,a_m} := \begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_1, a_m \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle a_m, a_1 \rangle & \cdots & \langle a_m, a_m \rangle \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(m \times m).$$

Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) $\forall a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}^n: \quad \det(B_{a_1,\ldots,a_m}) \in \mathbb{R}$

b) (2 Punkte) Die Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ bilden genau dann eine linear unabhängige Familie, wenn $\det(B_{a_1,\ldots,a_m}) \neq 0$.
**Tipp:** Betrachten Sie die Matrix $A = \mathrm{col}(a_1, \ldots, a_m) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times m)$. Was ist $\langle x, B_{a_1,\ldots,a_m} x \rangle$ für $x \in \mathbb{C}^m$?

c) (1 Punkt) Ist $m \geq n$, so gilt sogar: Die Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ bilden genau dann eine linear unabhängige Familie, wenn $\det(B_{a_1,\ldots,a_m}) > 0$.
(Die Aussage gilt auch, wenn $m < n$, ist dann aber schwieriger zu zeigen)

24. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mathrm{O}(n) \subset \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ die Menge der orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen und $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ die Menge der unitären $(n \times n)$-Matrizen.
Wir definieren

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid \det(A) = 1\},$$
$$\mathrm{SU}(n) := \{A \in U(n) \mid \det(A) = 1\}.$$

Zeigen Sie:

a) (1 Punkt) $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{SO}(n)$ sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

**oder**

$\mathrm{U}(n)$ und $\mathrm{SU}(n)$ sind Untergruppen von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

b) (1 Punkt) Ist $A \in \mathrm{O}(n)$ oder $A \in \mathrm{U}(n)$ und $\lambda$ ein Eigenwert von $F_A$, dann ist $|\lambda| = 1$.

c) (1 Punkt) Ist $A \in \mathrm{O}(n)$ oder $A \in \mathrm{U}(n)$ und sind $v_1$ und $v_2$ Eigenvektoren von $F_A$ zu verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1$ und $\lambda_2$, dann ist $v_1 \perp v_2$.
**Tipp:** Verwenden Sie Aufgabenteil b).

d) (1 Punkt) Ist $\sigma \in S_n$ und $P_\sigma = (p_{ij})_{i,j \in \{1,\ldots,n\}} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ die Permutationsmatrix wie in Aufgabe 43 des letzten Semesters, die definiert ist über $p_{i\sigma(i)} = 1$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $p_{ij} = 0$ für $j \neq \sigma(i)$, so gilt:

$$P_\sigma \in \mathrm{U}(n).$$

Abgabetermin: Donnerstag, 9. Juni 2016, um 08:00 Uhr