Prof. Dr. Katrin Wendland
Dipl.-Math. M.A. Maximilian Gerhards
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra II

SS 2016

Übungsblatt 5

17. Wir haben in Aufgabe 10 eine Anschauung für den Betrag der Determinante gefunden. In dieser Aufgabe geht es um ihr Vorzeichen.
Sei $v := \binom{v_1}{v_2} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ und $\{tv \in \mathbb{R}^2 \mid t \in \mathbb{R}\}$ die Ursprungsgerade mit Richtungsvektor v sowie $s_v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an dieser Geraden.

    a) (1 Punkt) Geben Sie eine explizite Abbildungsvorschrift für s_v an.
    Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass zwei Vektoren $v := \binom{v_1}{v_2}$ und $w := \binom{w_1}{w_2}$ senkrecht aufeinander stehen, wenn ihr Skalarprodukt $\langle v, w\rangle := v_1w_1 + v_2w_2$ Null ist, und dass die Länge eines Vektors $v := \binom{v_1}{v_2}$ berechnet wird über $\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

    b) (1 Punkt) Ermitteln Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume von s_v.

    c) (1 Punkt) Zeigen Sie: $\det(s_v) = -1$.

    d) (1 Punkt) Gibt es für jeden Vektorraum-Endomorphismus $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\det(f) = -1$ ein $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\binom{0}{0}\}$ mit $f = s_v$ (mit Beweis)?

18. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein K-Vektorraum-Endomorphismus. Seien weiter $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in K$ paarweise verschiedene Eigenwerte von f und $\mathrm{Eig}_{\lambda_1}(f), \ldots, \mathrm{Eig}_{\lambda_m}(f)$ die jeweiligen Eigenräume.
Zeigen Sie:

    a) (2 Punkte) Sind $v_i \in \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f) \setminus \{0\}$ für $i \in \{1, \ldots, m\}$ Eigenvektoren von f, so ist $(v_1, \ldots, v_m)$ eine linear unabhängige Familie.

    b) (2 Punkte) Die $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(f)$ bilden eine direkte Summe.

19. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung.

    a) (2 Punkte) Zeigen Sie: f kann auf eindeutige Weise zu einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung $f_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ fortgesetzt werden in dem Sinne, dass für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ gilt: $f_{\mathbb{C}}(x) = f(x)$.

    b) (1 Punkt) Sei $n > 0$ und $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times n)$ die Matrix mit $F_A = f$. Bestimmen Sie die Matrix $A_{\mathbb{C}} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{C}}(n \times n)$ mit $F_{A_{\mathbb{C}}} = f_{\mathbb{C}}$.

    c) (1 Punkt) Seien f und $f_{\mathbb{C}}$ wie in Aufgabenteil a). Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ Eigenwert von $f_{\mathbb{C}}$, dann auch der zu λ komplex konjugierte Wert $\overline{\lambda}$.

20. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, K ein Körper und $\lambda \in K$.

   a) (1 Punkt) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Zeigen Sie: Wenn ein Vektorraum-Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ diagonalisierbar ist, dann auch $f - \lambda \operatorname{id}_V$.

   b) (2 Punkte) Zeigen Sie: Der zur Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \operatorname{Mat}_K(n \times n)$$

   gehörige Vektorraum-Endomorphismus $F_A \colon K^n \to K^n$ ist nicht diagonalisierbar.

   c) (1 Punkt) Sei $K = \mathbb{C}$. Sie haben in Aufgabe 31 (c) des letzten Semesters geprüft, dass die Menge $\{P \in \mathbb{C}[x] \mid \deg(P) \leq n-1\}$ zusammen mit der Addition von Polynomen und der durch $\lambda \cdot \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k\right) := \sum_{k=0}^{n-1} \lambda a_k x^k$ definierten Skalarmultiplikation ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist, den wir mit $\mathbb{C}[x]_{n-1}$ bezeichnen.
   Weiter haben Sie in Aufgabe 38 (b) gezeigt, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} {}' \colon \quad \mathbb{C}[x]_{n-1} &\to \mathbb{C}[x]_{n-1} \\ \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k &\mapsto \sum_{k=1}^{n-1} k a_k x^{k-1} \end{aligned}$$

   $\mathbb{C}$-linear ist. Ist sie diagonalisierbar?

Abgabetermin: Donnerstag, 2. Juni 2016, um 08:00 Uhr