Prof. Dr. Katrin Wendland
Dipl.-Math. M.A. Maximilian Gerhards
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra II

SS 2016

Übungsblatt 4

13. (4 Punkte) Sei K ein Körper und seien $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Zeigen Sie:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq k < l \leq n} (x_l - x_k).$$

Diese Formel heißt auch Vandermonde-Determinante.
Tipp: Führen Sie einen Induktionsbeweis über n. Für den Induktionsschritt subtrahieren Sie für $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein geeignetes Vielfaches der j-ten Spalte von der $j+1$-ten.
Alternativ können Sie die x_i als Variablen interpretieren. Fassen Sie die linke Seite für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ der Reihe nach als Polynom in einer Variablen x_k über dem Ring $K[x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_n]$ auf und suchen Sie Nullstellen.

14. Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $n := \dim_K(V) > 0$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\bigwedge^m(V^*)$ bezeichne die Menge der alternierenden multilinearen Abbildungen von V^m nach K.

    a) (1 Punkt) Sie haben in LA I, Aufgabe 29 bereits gezeigt, dass $\mathrm{Abb}(V^m, K)$, die Menge aller Abbildungen von V^m nach K, ein K-Vektorraum ist.
    Zeigen Sie jetzt: $\bigwedge^m(V^*)$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Abb}(V^m, K)$.

    b) (1 Punkt) Geben Sie für $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3$ und $m = 2$ zwei linear unabhängige Elemente in $\bigwedge^2(\mathbb{R}^3)$ an (mit Beweis).

    c) (2 Punkte) Zeigen Sie: $\dim_K(\bigwedge^n(V^*)) = 1$ und $\dim_K(\bigwedge^m(V^*)) = 0$ für $m > n$.
    Tipp: Denken Sie an Aufgabe 6 b).

15. Sei wieder K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit $n := \dim_K(V) > 0$ und $\bigwedge^m(V^*)$ für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Menge der alternierenden multilinearen Abbildungen von V^m nach K.
Für jeden K-Vektorraum-Endomorphismus $F : V \to V$ definieren wir die Abbildung

$$F^*\colon \quad \bigwedge\nolimits^m(V^*) \;\to\; \mathrm{Abb}(V^m, K)$$

über $F^*(\alpha)\colon (v_1, \ldots, v_m) \mapsto \alpha(F(v_1), \ldots, F(v_m))$.

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Abbildung $F^*(\alpha)$
für $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $\alpha\colon (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = x_1y_2 - x_2y_1$ und $F\colon v \mapsto Bv$ für $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

oder

für $V = K^2$, $\alpha = \det \circ \mathrm{col}$ wie in Aufgabe 4 b) und $F = F_A\colon x \mapsto Ax$ mit $A \in \mathrm{Mat}_K(2 \times 2)$.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie: Für alle $F \in \mathrm{End}_K(V)$ und alle $\alpha \in \bigwedge^m(V^*)$ ist $F^*(\alpha) \in \bigwedge^m(V^*)$.

c) (2 Punkte) Sei $m = n$.
Zeigen Sie für alle $F \in \mathrm{End}_K(V)$ und alle $\alpha \in \bigwedge^m(V^*)$:

$$F^*(\alpha) = \det(F) \cdot \alpha$$

Tipp: Verwenden Sie wieder Aufgabe 6 b).

16. Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

a) (1 Punkt) Sei $E_n \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ die Einheitsmatrix. Vereinfachen Sie die Abbildung $\lambda \mapsto \det(\lambda E_n)$, indem Sie die Determinante ausrechnen.

b) (3 Punkte) Zeigen Sie: Für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ gilt:

$$\chi_{AB}(\lambda) = \chi_{BA}(\lambda).$$

Tipp: Das folgt nicht direkt aus der Multiplikativität der Determinante (warum nicht?). Beweisen und verwenden Sie stattdessen die folgenden Matrixgleichungen:

$$\left(\begin{array}{c|c} -\lambda E_n & A \\ \hline 0 & E_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_n & A \\ \hline B & \lambda E_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AB - \lambda E_n & 0 \\ \hline B & \lambda E_n \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{c|c} \lambda E_n & 0 \\ \hline B & -E_n \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} E_n & A \\ \hline B & \lambda E_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda E_n & \lambda A \\ \hline 0 & BA - \lambda E_n \end{array}\right)$$

Abgabetermin: Freitag, 27. Mai 2016, um 08:00 Uhr