Prof. Dr. Katrin Wendland
Dipl.-Math. M.A. Maximilian Gerhards
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 3

9. (4 Punkte) Berechnen Sie alle Lösungen $x \in \mathbb{R}^5$ des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & & & + & x_5 & = & 2 \\ -1x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & & & + & 2x_5 & = & 5 \\ & & 3x_2 & & & & & - & 4x_5 & = & -1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 4x_5 & = & 9 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & & & & & + & 3x_5 & = & 1 \end{array}$$

mit der Cramerschen Regel.
Achtung: Rechnen Sie auf keinen Fall blind los! Nutzen Sie alles, was Sie über Determinanten wissen – und achten Sie auf die Vorzeichen!
Tipp: Schauen Sie sich die Spaltenvektoren genau an.

10. Wir wollen eine Anschauung für die Determinante bekommen.
Sei dazu zunächst K ein Körper und sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ beliebig. Seien P_{ij}, $M_i(\lambda)$ und $Q_{ij}(\lambda)$ die Elementarmatrizen aus **LA I, Beispiel 3.4.5**.

a) (2 Punkte) In LA I, Aufgabe 49 wurde definiert, dass eine Matrix $B \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ aus einer zweiten Matrix $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ durch elementare Spaltenoperationen gewonnen werden kann, wenn es ein Produkt Q von Elementarmatrizen gibt, sodass $B = AQ$. Gibt es ein solches Produkt Q ohne Faktoren $M_i(\lambda)$, so sagen wir, dass B aus A durch elementare Spaltenoperationen des Typs I und III gewonnen werden kann.
Zeigen Sie: Jede quadratische Matrix $B \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ kann aus einer oberen Dreiecksmatrix durch elementare Spaltenoperationen des Typs I und III gewonnen werden.
Tipp: Machen Sie sich klar, was die Multiplikation mit einer Elementarmatrix von rechts bewirkt, oder führen Sie die Aussage auf die entsprechende für Zeilenoperationen zurück und beweisen Sie diese.

b) (1 Punkt) Sei nun $K = \mathbb{R}$, $n = 3$ und seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Wir definieren den von v_1, v_2 und v_3 aufgespannten Spat (oder auch das von ihnen aufgespannte Parallelepiped)

$$\mathrm{Spat}(v_1, v_2, v_3) := \Big\{ \sum_{i=1}^{3} t_i v_i \mid t_i \in [0,1] \Big\}.$$

Wählen Sie drei Vektoren und skizzieren Sie den von ihnen aufgespannten Spat.

Sei $A \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3 \times 3)$ eine Matrix mit Spaltenvektoren v_1, v_2, v_3, $P \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3 \times 3)$ und w_1, w_2, w_3 die Spaltenvektoren der Matrix AP. Argumentieren Sie anschaulich, dass das Volumen von $\mathrm{Spat}(w_1, w_2, w_3)$ gleich dem Volumen von $\mathrm{Spat}(v_1, v_2, v_3)$ ist, wenn $P = P_{ij}$ oder $P = Q_{ij}(\lambda)$, und das $|\lambda|$-fache, wenn $P = M_j(\lambda)$.
Tipp: Erinnern Sie sich an Volumenberechnung in der Schule.

c) (1 Punkt) Folgern Sie: Für jede quadratische Matrix $B \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(3 \times 3)$ ist das Volumen des von den Spaltenvektoren aufgespannten Spats gleich dem Betrag der Determinante.
Tipp: Was ist das Volumen im Fall einer oberen Dreiecksmatrix?

11. Sei K ein Körper.

a) (2 Punkte) Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $F \colon V \to V$ ein Endomorphismus.
Zeigen Sie: Für alle Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V gilt

$$\det(M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A})) = \det(M(\mathcal{B}, F, \mathcal{B})).$$

Wir definieren $\det(F) := \det(M(\mathcal{A}, F, \mathcal{A}))$.

b) (2 Punkte) Wir definieren für $A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_K(2 \times 2)$ die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{lmult}_A \colon \mathrm{Mat}_K(2 \times 2) &\to \mathrm{Mat}_K(2 \times 2) \\ B &\mapsto AB. \end{aligned}$$

(Dass lmult_A linear ist, dürfen Sie ohne Beweis benutzen)
Berechnen Sie $\det(\mathrm{lmult}_A)$ und zeigen Sie: lmult_A ist genau dann bijektiv, wenn A invertierbar ist. Was ist in diesem Fall die Umkehrabbildung?

12. (4 Punkte) Sei K ein Körper. Für eine quadratische Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$ definieren wir ihr CHARAKTERISTISCHES POLYNOM in der Variablen λ

$$\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n).$$

Erklären Sie, warum das ein Polynom in der Variablen λ ist, also $\chi_A = c_N \lambda^N + c_{N-1}\lambda^{N-1} + \ldots + c_1\lambda + c_0 \in K[\lambda]$. Bestimmen Sie seinen Grad N und geben Sie an, wie die Koeffizienten c_N, c_{N-1} und c_0 aus den Einträgen a_{ij} der Matrix berechnet werden können.

Abgabetermin: Donnerstag, 12. Mai 2016, um 08:00 Uhr