PROF. DR. KATRIN WENDLAND
DIPL.-MATH. M.A. MAXIMILIAN GERHARDS
MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT FREIBURG

LINEARE ALGEBRA II
SS 2016

Übungsblatt 2

5. Sei K ein Körper, X eine Menge, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ und $f : X^m \to K$ eine Abbildung.
   Zeigen Sie:

   a) (2 Punkte) Ist X ein K-Vektorraum und f multilinear, so gilt: Wenn f alternierend ist, dann ist f antisymmetrisch.
   Tipp: Betrachten Sie $f(\ldots, x+y, \ldots, x+y, \ldots)$ mit beliebigen restlichen Einträgen.

   b) (2 Punkte) Ist $\operatorname{char}(K) \neq 2$, also $1_K + 1_K \neq 0_K$, so gilt: Wenn f antisymmetrisch ist, dann ist f alternierend.
   An welcher Stelle geht die Voraussetzung ein?

6. Sei K ein Körper. Seien V und W K-Vektorräume, $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $f \colon V^m \to W$ eine multilineare Abbildung.
   Zeigen Sie:

   a) (2 Punkte) f ist bereits eindeutig bestimmt durch die Bilder $f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ aller m-Tupel von Basisvektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_m} \in \{v_1, \ldots, v_n\}$, d.h.
   $$\big(\forall v_{i_1}, \ldots, v_{i_m} \in \{v_1, \ldots, v_n\} \colon f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m}) = g(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})\big) \;\Rightarrow\; f = g.$$

   b) (2 Punkte) Ist f zusätzlich alternierend, so ist es bereits eindeutig bestimmt durch die Bilder $f(v_{i_1}, \ldots, v_{i_m})$ aller streng geordneten m-Tupel von Basisvektoren $v_{i_1}, \ldots, v_{i_m} \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $i_1 < \ldots < i_m$.
   Zeigen Sie weiter: Wenn $m > n$, so gilt dann bereits $f = 0$.
   Tipp: Nutzen Sie Aufgabe 5. a).

7. Sei K ein Körper und $A \in \operatorname{Mat}_K(m \times m)$.
   P_{ij}, $M_i(\lambda)$ und $Q_{ij}(\lambda)$ seien die Elementarmatrizen aus **LA I, Beispiel 3.4.5**.
   Zeigen Sie:

   a) (2 Punkte) $\det(P_{ij}A) = -\det(A)$

   b) (2 Punkte) $\det(Q_{ij}(\lambda)A) = \det(A)$

   Tipp: Vielleicht möchten Sie statt mit Zeilenoperationen lieber mit Spaltenoperationen arbeiten.

8. Sei K ein Körper und seien $A \in \mathrm{Mat}_K(n \times n)$, $B \in \mathrm{Mat}_K(n \times m)$, $C \in \mathrm{Mat}_K(m \times n)$ und $D \in \mathrm{Mat}_K(m \times m)$.

   a) (2 Punkte) Zeigen Sie die Determinantenformel für OBERE BLOCKDREIECKSMATRIZEN:

   $$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array} \right) = \det(A)\det(D).$$

   Tipp: Für welche $\sigma \in S_{n+m}$ verschwindet der Summand in der Determinantenformel? Wie kann man die restlichen σ als Verkettung zweier „kürzerer" Permutationen schreiben?

   b) (2 Punkte) Gilt auch allgemein

   $$\det \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C),$$

   falls $m = n$, falls also $\det(B)$ und $\det(C)$ auch definiert sind? Beweisen Sie Ihre Vermutung.

Abgabetermin: Freitag, 6. Mai 2016, um 08:00 Uhr