Prof. Dr. Katrin Wendland
Dipl.-Math. M.A. Maximilian Gerhards
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Lineare Algebra II
SS 2016

Anwesenheitsaufgaben

Motto: Es gibt auch Vektoren, die keine senkrecht geschriebenen Tupel sind!

0. Erinnern sich daran, dass $\mathrm{Abb}(X, K)$, der Raum der Abbildungen von einer beliebigen Menge X in einen vorgegebenen Körper K, ein K-Vektorraum ist. Wie ist die Vektoraddition, wie die Skalarmultiplikation definiert?
Wir betrachten jetzt den speziellen Fall $X = K = \mathbb{R}$.

   a) Welche der folgenden Teilmengen sind Untervektorräume?

$$\begin{aligned} M_1 &:= \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\} \\ M_2 &:= \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(\pi) = 0\} \\ M_3 &:= \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = \pi\} \\ M_4 &:= \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ hat eine Nullstelle}\} \end{aligned}$$

   b) Finden Sie je ein weiteres Beispiel für eine Teilmenge von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, die ein Untervektorraum ist, und eine, die kein Untervektorraum ist.

   c) Finden Sie drei Elemente in $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\sin, \cos)$. Sind die Elemente linear unabhängig?

   d) Finden Sie eine Basis $\mathcal{B}$ von $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\sin, \cos)$.

   e) Zeigen Sie: Die Abbildung

$$\begin{aligned} d\colon \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\sin, \cos) &\to \mathrm{span}_{\mathbb{R}}(\sin, \cos) \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

   ist wohldefiniert und linear.

   f) Was ist die darstellende Matrix $M(\mathcal{B}, d, \mathcal{B})$ der Abbildung d bezüglich der von Ihnen gefundenen Basis $\mathcal{B}$?

   g) Hat die Abbildung d einen Eigenvektor, also einen Vektor $v \neq 0$ mit $d(v) = \lambda v$ für einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$?

   Zusatzaufgabe für Blitzgescheite: Wir können die Abbildung d fortsetzen zu einer $\mathbb{C}$-linearen Abbildung

$$\tilde{d}\colon \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\sin, \cos) \to \mathrm{span}_{\mathbb{C}}(\sin, \cos).$$

   Wie sieht diese aus? Gibt es einen Eigenvektor zu einem komplexen Eigenwert? Gibt es vielleicht sogar eine Basis aus Eigenvektoren? Wie sieht die darstellende Matrix von $\tilde{d}$ bezüglich dieser Basis aus?