PROF. DR. KATRIN WENDLAND
PD DR. EMANUEL SCHEIDEGGER
MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT FREIBURG

KOMMUTATIVE ALGEBRA UND EINFÜHRUNG IN DIE ALGEBRAISCHE GEOMETRIE
SS 15

Übungsblatt 9

Krulldimension

33. Morphismen von Varietäten
(4 Punkte) Es seien Y, Z affine Varietäten über einem algebraisch abgeschlossenen Körper k. Weiter sei $\varphi : Y \to Z$ stetig, so daß für alle $z \in Z$, und alle offene Umgebungen $U \ni z$, und regulären $f : U \to \mathbb{A}^1_k$ der Rückzug $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ von f unter φ wieder regulär ist. Zeigen Sie, daß φ ein Morphismus von affinen Varietäten ist, und daß jeder Morphismus von affinen Varietäten von solch einer Abbildung φ induziert wird.

34. Krulldimension von Ringerweiterungen
(4 Punkte) Es sei $\varphi : R_1 \to R_2$ ein Ringhomomorphismus, so daß der kommutative Ring R_2 über $\varphi(R_1)$ algebraisch und endlich erzeugt ist. Zeigen Sie, daß die Krulldimension von R_1 (vgl. Aufgabe 32) größer ist als die von R_2. Betrachten Sie dazu Primideale $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq R_2$ und zeigen Sie, daß gilt: $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \subsetneq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$. Verwenden Sie dazu die Resultate der Aufgaben 25 und 30.

35. Singuläre Punkte
Es sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.
    (a) Bestimmen Sie die singulären Punkte von $V(f) \subset \mathbb{A}^2_k$ für folgende Polynome $f \in k[x, y]$:
        i. (1 Punkt) $f = y^2 - 4x^3 + g_2x + g_3$, $g_2, g_3 \in k$.
        ii. (1 Punkt) $f = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2\,xy(x + y + 1)$.
    (b) Bestimmen Sie die singulären Punkte von $V(f) \subset \mathbb{A}^3_k$ für folgende Polynome $f \in k[x, y, z]$:
        i. (1 Punkt) $f = x^2 + y^2 - z^2$
        ii. (1 Punkt) $f = x^4 + y^4 + z^4 + 1 - 4\,txyz$, $t \in k$.

36. Kodimension
Die Krulldimension eines kommutativen Rings (vgl. Aufgabe 32) bezeichnen wir mit

K-dim. Es sei R ein kommutativer Ring. Die Kodimension $\operatorname{codim}_R \mathfrak{p}$ eines Primideals $\mathfrak{p} \subset R$ ist definiert als das Maximum n der Längen von Ketten $\mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ von Primidealen $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$. Wir schreiben $R_\mathfrak{p} := R[S^{-1}]$ für $S := R \setminus \mathfrak{p}$. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (1 Punkt) $\operatorname{codim}_R \mathfrak{p} = \text{K-dim}\, R_\mathfrak{p}$.

(b) (2 Punkte) $\text{K-dim}\, R \geq \text{K-dim}\, R/\mathfrak{p} + \operatorname{codim}_R \mathfrak{p}$.

(c) (1 Punkt) Es sei k ein Körper und $R = k[x_1, x_2, x_3]/(x_1x_2, x_1x_3)$. Geben Sie ein Ideal $\mathfrak{p} \subset R$ an, für welches die Gleichheit in Aufgabe (b) nicht erfüllt ist (mit Beweis). Zeichnen Sie eine Skizze.

Abgabetermin: Mittwoch, 1. 7. 2015 um 11:30 Uhr.