Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Kommutative Algebra und Einführung
in die algebraische Geometrie
SS 15

Übungsblatt 8

Tangentialraum, Primidealketten

29. Ideale in ganzen Ringerweiterungen
Es seien $R_1 \subset R_2$ kommutative Ringe, so daß R_2 eine ganze Ringerweiterung von R_1 ist und $\varphi : R_1 \hookrightarrow R_2$ bezeichne die Inklusion. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (1 Punkt) Falls $I_2 \subset R_2$ ein Ideal und $I_1 = \varphi^{-1}(I_2)$ ist, dann ist R_2/I_2 ganz über R_1/I_1.
    (b) (1 Punkt) Falls $\varphi(a) \in R_2$ eine Einheit ist, dann ist $a \in R_1$ eine Einheit (vgl. Satz 2.3).
    (c) (2 Punkte) Falls $\mathfrak{m} \subset R_2$ maximal ist, dann ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ ein maximales Ideal in R_1. Betrachten Sie dazu den Körper $R_2/\mathfrak{m}$.

30. Primideale in ganzen Ringerweiterungen
Es sei $\varphi : R_1 \hookrightarrow R_2$ wie in Aufgabe 29. Weiter sei $\mathfrak{p}_1 \subset R_1$ ein Primideal. Zeigen Sie, daß gilt:

    (a) (1 Punkt) Falls $S \subset R_1$ eine multiplikativ abgeschlossene Menge ist, dann ist $R_2[S^{-1}]$ ganz über $R_1[S^{-1}]$.
    (b) (1 Punkt) Mit $S := R_1 \setminus \mathfrak{p}_1$ ist $R_1[S^{-1}]$ ein lokaler Ring.
    (c) (2 Punkte) Es gibt ein Primideal $\mathfrak{p}_2 \subset R_2$, so daß $\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}_1$. (Beachten Sie, daß $\mathfrak{p}_1$ nicht ein Primideal in R_2 sein muss.) Wenden Sie dazu das Resultat aus Aufgabe 29(c) auf $R_2[S^{-1}]$ mit $S = R_1 \setminus \mathfrak{p}_1$ an.

31. Tangentialraum
Es sei $X \subset \mathbb{A}_k^n$ eine affine Varietät über k. Es sei $p = (a_1, \ldots, a_n) \in X$ und T_pX der Tangentialraum von X in p. Es seien nun $f \in k[X]$ so, daß $f(p) \neq 0$ und $D(f) \subset X$ die Standard offenen Mengen aus Aufgabe 22.

    (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß $D(f)$ eine affine Varietät ist mit $D(f) \cong Z \subset \mathbb{A}_k^{n+1}$ und $I(Z) = (I(X), f\,T_{n+1} - 1) \subset k[T_1, \ldots, T_n, T_{n+1}]$.

(b) (1 Punkt) Es sei $q = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}) \in Z$. Bestimmen Sie die Gleichungen von $T_q Z \subset \mathbb{A}_k^{n+1}$.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, daß es einen natürlichen Isomorphismus $T_p D(f) \cong T_p X$ affiner Räume gibt, d. h. einen natürlichen Vektorraum-Isomorphismus der Vektorräume V, W mit $T_p D(f) = p + V$, $T_p X = p + W$.

32. Dimension einer singulären Varietät
Es sei $Z = V(y^2 - x^3) \subset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2$.

(a) (2 Punkte) Es sei $\mathfrak{m}_z = I(\{z\}) \subset \mathbb{C}[Z]$ das maximale Ideal von $z = (\xi, \eta) \in Z$. Bestimmen Sie die Dimension des $\mathbb{C}$-Vektorraums $\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$, indem Sie eine Basis dieses Vektorraums angeben.

(b) (2 Punkte) Die Krulldimension eines kommutativen Rings R ist das Maximum n der Längen von Ketten $R \supsetneq \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n$ von Primidealen $\mathfrak{p}_i$. Zeigen Sie, daß die Krulldimension von $\mathbb{C}[Z]$ gleich 1 ist.
Betrachten Sie dazu z.B. f^2 für $f \in \mathfrak{m}_z$, $z = (\xi, \eta)$, und bestimmen Sie $\mathfrak{p} \cap (x - \xi)$ für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_z$ mit $f \in \mathfrak{p}$.

Unterscheiden Sie zwischen $(\xi, \eta) = (0, 0)$ und $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$.

Abgabetermin: Mittwoch, 24. 6. 2015 um 11:30 Uhr.