Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie
SS 15

Übungsblatt 5

Topologie

17. Radikalideal
(4 Punkte) Es sei k ein Körper und $R = k[T_1, \ldots, T_n]$. Zeigen Sie, daß für ein Ideal $I \subset R$ gilt: $\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq I, \mathfrak{p} \text{ prim}} \mathfrak{p}$.

18. Noether–Normalisierung
(4 Punkte) Bestimmen Sie eine Noether–Normalisierung von $R = \mathbb{C}[x, y, z]/\langle xyz, xy+yz+zx\rangle$. Finden Sie dazu neue Variablen u, v, w so, daß $R = S + Sw$ mit $S = \mathbb{C}[u, v]/\langle u^2 v\rangle$.

19. Zusammenhängende Räume
Es seien X, Y topologische Räume. X heisst zusammenhängend, falls X nicht die disjunkte Vereinigung zweier nichtleerer offener Teilmengen ist. Zeigen Sie, daß gilt:
    (a) (1 Punkt) Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann zusammenhängend, wenn A und $\emptyset$ die einzigen Teilmengen von A sind, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.
    (b) (2 Punkte) X ist genau dann zusammenhängend, wenn jede stetige Abbildung von X in einen diskreten Raum konstant ist.
    (c) (1 Punkt) Falls X zusammenhängend und $f : X \to Y$ stetig ist, dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

20. $\mathbb{P}^n_k$ als topologischer Raum
Es sei $(X, \mathcal{O})$ ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $\mathcal{S} \subset \mathcal{O}$ heisst Subbasis von $\mathcal{O}$, falls die Menge $\mathcal{B} = \{U_1 \cap \cdots \cap U_k \mid k \in \mathbb{N}, U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{S}\}$ eine Basis von $\mathcal{O}$ bildet, mit der Konvention, daß der leere Durchschnitt die Grundmenge X ist.
    (a) (1 Punkt) Es sei nun $\mathcal{S}$ ein beliebiges System von Teilmengen von X und $\mathcal{B}$ wie oben. Zeigen Sie, daß $\mathcal{O}' = \{U \subset X \mid \forall p \in U \, \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } p \in B, B \subset U\}$ eine Topologie auf X definiert.
    Zeigen Sie dazu, daß $\mathcal{B}$ die charakterisierenden Eigenschaften einer Basis einer Topologie besitzt, und daß $\mathcal{O}'$ eine Topologie definiert, falls $\mathcal{B}$ diese Eigenschaften hat.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, daß es genau eine Topologie $\mathcal{O}'$ gibt, so daß $\mathcal{S}$ aus Aufgabe (a) eine Subbasis ist.

(c) (2 Punkte) Es seien n, U_i wie in Aufgabe 7. Zeigen Sie, daß $\mathbb{P}_k^n$ mit der Subbasis $\mathcal{S} = \{U_i, i = 0, \ldots, n\}$ ein irreduzibler topologischer Raum ist.

Abgabetermin: Mittwoch, 3. 6. 2015 um 11:30 Uhr.