Prof. Dr. Katrin Wendland
PD Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Kommutative Algebra und Einführung in die algebraische Geometrie
SS 15

Übungsblatt 2

Algebraische und projektive Mengen

5. Verschwindungsideal eines Punktes
   (4 Punkte) Es seien R ein kommutativer Ring, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ ein Punkt in R^n. Zeigen Sie, daß für das Verschwindungsideal $I(p)$ von p gilt: $I(p) = (p_1 - x_1, p_2 - x_2, \ldots, p_n - x_n)$ in $R[x_1, \ldots, x_n]$.

6. Algebraische Teilmengen von k^n
   Es sei k ein Körper.

   (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle algebraischen Teilmengen von k.

   (b) (3 Punkte) Zeigen Sie: Die algebraischen Teilmengen von k^2 sind genau die Vereinigungen der Nullstellenmengen einzelner Polynome mit endlichen Mengen.
   Hinweis: Sie dürfen folgende Resultate aus der Algebra verwenden: Jedes $f \in k[x, y]$ ist als Produkt eindeutig bestimmter irreduzibler $f_i \in k[x, y]$ darstellbar. Sind $f, g \in k[x, y]$ teilerfremd, dann gibt es $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in k[x, y]$ und $h \in k[x]$ mit $h = f\widetilde{f} + g\widetilde{g}$.

7. Der projektive Raum
   Es sei k ein Körper. Wir definieren den n–dimensionalen projektiven Raum über k als die Menge der Geraden durch den Ursprung im k^{n+1}. Wir identifizieren zwei Punkte $x, y \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ auf einer Geraden, indem wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ dadurch definieren, daß $x \sim y$ genau dann, wenn es ein $\lambda \in k \setminus \{0\}$ gibt, so daß $y = \lambda x$. Dann sei
   $$\mathbb{P}^n_k = \left(k^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim \ .$$
   Wir stellen einen Punkt $x \in \mathbb{P}^n_k$ (eine Äquivalenzklasse) durch seine homogene Koordinaten $(x_0 : x_1 : \cdots : x_n) := [(x_0, \ldots, x_n)]$, $x_i \in k$ dar. Zeigen Sie, daß gilt:

   (a) (1 Punkt) $\mathbb{P}^n_k$ ist wohldefiniert.

   (b) (1 Punkt) $\mathbb{P}^n_k \cap \{x_i = 0\} \cong \mathbb{P}^{n-1}_k$ für jedes $i = 0, \ldots, n$.

(c) (1 Punkt) $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n_k \,|\, x_i \neq 0\} \cong k^n$ für jedes $i = 0, \ldots, n$. Beschreiben Sie die Bijektion mithilfe der homogenen Koordinaten auf U_i.

(d) (1 Punkt) $\mathbb{P}^n_k \cong \bigsqcup_{i=0}^n k^i$. Die Komponenten der Dimension $0, 1, 2, \ldots, n-1$ heissen "Punkt, Gerade, Ebene, etc. im Unendlichen".

8. Projektive Kurven
Die Homogenisierung eines inhomogenen Polynoms $f \in k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ vom Grad m ist definiert durch die bijektive Abbildung $k[\xi_1, \ldots, \xi_n] \to k[x_0, \ldots, x_n]_m, f \mapsto F, F(x_0, \ldots, x_n) := {x_0}^m f\left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right)$. Im Folgenden betrachten wir eine projektive Kurve $C = \{x = (x_0 : x_1 : x_2) \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \,|\, F(x_0, x_1, x_2) = 0\}$, $F \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]_m$. Zeigen Sie, daß gilt:

(a) (1 Punkt) C ist wohldefiniert.

(b) (1 Punkt) Der Schnitt von C mit U_0 aus Aufgabe 7(c) ist durch die Kurve $\{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, f(\xi_1, \xi_2) = 0\}$ gegeben, wobei F aus f mittels Homogenisierung bestimmt ist; analog für die anderen U_i.

(c) (2 Punkte) Es gilt die Eulersche Relation: $x_0 \frac{\partial F}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} = mF$.

Abgabetermin: Mittwoch, 6. 5. 2015 um 10:00 Uhr.