Nullstellenmengen von Polynomen

R: ein Kring, d.h. ein kommutativer Ring (immer mit 1)
k: ein Körper

zu $I \subset k[T_1, \dots, T_n]$: $V(I) = Z(I) := \{x \in k^n \mid f(x) = 0 \ \forall f \in I\}$

„Nullstellenmenge" $= V(\underbrace{(I)}_{\text{von } I \text{ erzeugtes Ideal}})$

$\boxed{Z \subset k^n \text{ heißt algebraisch} :\Leftrightarrow Z = Z(I) \text{ für ein } I \subset k[T_1, \dots, T_n]}$

maximales Ideal $m \subset R$: ein Ideal $m \neq R$, so dass für jedes Ideal $I \subsetneq R$ gilt:
$m \subset I \Rightarrow m = I$

äquivalent: R/m ist ein Körper

Primideal $I \subset R$: ein Ideal, so dass gilt: $I \neq R$ und
$f \cdot g \in I$ für $f, g \in R \Rightarrow f \in I$ oder $g \in I$

äquivalent: R/I ist nullteilerfrei

$\boxed{\text{Jedes maximale Ideal ist prim.}}$

Nullstellenmenge und Verschwindungsideal

k: Körper, $R := k[T_1, \dots, T_n]$, $S \subset R$, $W \subset k^n$

$V(S) := \{z \in k^n \mid f(z) = 0 \ \forall f \in S\}$, $I(W) := \{f \in R \mid f(z) = 0 \ \forall z \in W\}$

algebraische Menge — Verschwindungsideal

V und I
- kehren „$\subset$" um („Umkehrung der Inzidenzrelationen")
- vergrössern Mengen unter Hintereinanderschaltung (IV und VI)
- induzieren eine 1:1 Korrespondenz zwischen algebraischen $Z \subset k^n$ und Idealen der Form $I(Z) \subset R$, Z algebraisch

Eigenschaften algebraischer Mengen

- endliche Vereinigungen und beliebige Schnitte algebraischer Mengen sind algebraisch
- $\mathbb{A}_k^n$ und $\emptyset$ sind algebraisch
- unendliche Vereinigungen algebraischer Mengen sind mitunter nicht algebraisch

- algebraisches $Z \subset \mathbb{A}_k^n$ heißt irreduzibel
  $:\Leftrightarrow$ (falls $Z = Z_1 \cup Z_2$, Z_k algebraisch $\Rightarrow Z = Z_1$ od. $Z = Z_2$) $\Leftrightarrow I(Z)$ ist prim

Noethersche Ringe

R : ein kRing heißt Noethersch

:$\Leftrightarrow$ Der Teilerkettensatz gilt, d.h. aufsteigende Idealketten werden stationär.

$\Leftrightarrow$ Jede nichtleere Menge von Idealen enthält ein maximales Element bzgl. „$\subset$"

$\Leftrightarrow$ Jedes Ideal ist endlich erzeugt

Beispiele Noetherscher Ringe:

- jeder Körper k
- der Ring $\mathbb{Z}$
- für Noethersches R :
  - jedes $R[T_1, \dots, T_n]$ (Hilbertscher Basissatz)
  - jedes R/I, falls $I \subset R$ ein Ideal ist
  - jede endlich erzeugte k-Algebra

Konsequenz: Jede absteigende Kette algebraischer Mengen in k^n wird stationär.

Zerlegung in irreduzible Komponenten

k: Körper, $Z \subset \mathbb{A}_k^n$: algebraische Menge

$\Rightarrow$ • Z ist Vereinigung endlich vieler irreduzibler algebraischer Mengen

• bis auf die Reihenfolge ist die Zerlegung $Z = \bigcup_j Z_j$, Z_j irreduzibel, eindeutig, falls $Z_j \not\subset Z_m$ für alle $j \neq m$

Ganze Ringerweiterung und Noether-Normalisierung

S, R: Kringe, $(A,+)$: Abelsche Gruppe, k: Körper

A heißt **S-Modul** $:\Leftrightarrow$ $S \curvearrowright \mathrm{End}(A)$ via Ringhomomorphismus $S \to (\mathrm{End}A, +, \circ)$

R heißt **S-Algebra** $:\Leftrightarrow$ R trägt eine S-Modul Struktur, $(sa)\cdot\tilde{a} = s(a\cdot\tilde{a}) = a\cdot(s\tilde{a})$ $\forall s\in S,\ a,\tilde{a}\in R$

- **endlich erzeugt** über S $:\Leftrightarrow$ $\exists\, r_1,\dots,r_n \in R,\ n\in\mathbb{N}$, so dass der S-Algebren-Homomorphismus $\pi: S[T_1,\dots,T_n] \to R$ mit $\pi(T_j) = r_j\ \forall j$ surjektiv ist
- **endlich** über S $:\Leftrightarrow$ R ist als S-Modul endlich erzeugt

  $\Leftrightarrow$ R ist **ganze Ringerweiterung** von S, d.h.
  $\forall x\in R\ \exists N\in\mathbb{N},\ \alpha_{N-1},\dots,\alpha_0\in S:\ x^N + \alpha_{N-1}x^{N-1} + \dots + \alpha_0 = 0$

Noether-Normalisierung

R sei als k-Algebra endlich erzeugt über k

$\Rightarrow$ $\exists$ über k algebraisch unabhängige $\tilde{r}_1,\dots,\tilde{r}_m$
(d.h. $\tilde{\pi}: k[\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_m] \to R$ k-Algebren-Homomorphismus mit $\tilde{\pi}(\tilde{T}_j) = \tilde{r}_j\ \forall j$ ist injektiv),

so dass R eine endliche $k[\tilde{T}_1,\dots,\tilde{T}_m]$-Algebra ist.

Hilbertscher Nullstellensatz

k: algebraisch abgeschlossener Körper

Version I L: Körper, der als $\tilde{k}$-Algebra endlich erzeugt ist ($\tilde{k}$: irgendein Körper) $\Rightarrow$ L ist algebraisch über $\tilde{k}$; $L = k$, falls $k = \tilde{k}$

Version II Jedes maximale Ideal $\mathfrak{m} \subset k[T_1, \dots, T_n]$ hat die Form
$\mathfrak{m} = (T_1 - \alpha_1, \dots, T_n - \alpha_n) = I\left(\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n\end{pmatrix}\right\}\right)$, $\alpha_i \in k$.

körpertheoretische Version $I \subset k[T_1, \dots, T_n]$ ein Ideal,
$V(I) = \emptyset \iff I = k[T_1, \dots, T_n]$

Hilbertscher Nullstellensatz
$I \subset k[T_1, \dots, T_n]$ ein Ideal $\Rightarrow$ $I(V(I)) = \sqrt{I}$
D.h. I, V stellen eine 1:1 Korrespondenz zwischen algebraischen Mengen und Radikalidealen her.

Topologie

X: Menge

X wird durch Festlegung aller offenen oder aller abgeschlossenen Mengen zu einem topologischen Raum, wobei

- $\emptyset, X$ offen sind (und abgeschlossen)
- beliebige Vereinigungen offener (bzw. beliebige Schnitte abgeschlossener) Mengen wieder offen (bzw. abgeschlossen) sind
- endliche Schnitte offener (bzw. endliche Vereinigungen abgeschlossener) Mengen wieder offen (bzw. abgeschlossen) sind
- $U \subset X$ offen ist, genau wenn $Z = X \setminus U$ abgeschlossen ist

Topologische Räume: Definitionen

$(X, \mathcal{T})$: topologischer Raum

- $\tilde{\mathcal{T}}$: eine weitere Topologie auf X heißt feiner (stärker), falls $\mathcal{T} \subset \tilde{\mathcal{T}}$ und gröber (schwächer), falls $\mathcal{T} \supset \tilde{\mathcal{T}}$
- $(X, \mathcal{T})$ heißt Hausdorffsch, falls je zwei $p, q \in X$, $p \neq q$ durch offene, disjunkte Umgebungen von p, q getrennt werden können
- $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt Basis der Topologie $\mathcal{T}$, falls gilt:
  $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, p \in B_1 \cap B_2 \ \exists B_3 \in \mathcal{B}: \ p \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$,
  $\mathcal{T} = \{U \subset X \mid \forall p \in U \ \exists B \in \mathcal{B}: \ p \in B \subset U\}$
- Abschluss $\overline{W}$ von $W \subset X$: die minimale abgeschlossene Menge in X, die W enthält
- X heißt zusammenhängend, falls X nicht die disjunkte Vereinigung zweier nicht leerer offener Mengen ist
- X heißt irreduzibel, falls X nicht die Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen ist
- $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset X$ konvergiert gegen $x \in X$, falls jede offene Umgebung von x alle außer endlich vielen x_j enthält
- $f: X \to Y$ mit einem topologischen Raum Y heißt stetig, falls alle Urbilder offener Mengen unter f offen sind

Zariski-Topologie

k: ein Körper

Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}_k^n$: $Z \subset \mathbb{A}_k^n$ ist abgeschlossen $:\Leftrightarrow$ Z ist algebraisch
auf $W \subset \mathbb{A}_k^n$: $Z \subset W$ ist abgeschlossen
$:\Leftrightarrow$ $Z = \tilde{Z} \cap W$, $\tilde{Z} \subset \mathbb{A}_k^n$ Zariski-abgeschlossen

Eigenschaften

- für unendliche k ist die Zariski-Topologie nicht Hausdorffsch
- $W \subset \mathbb{A}_k^n \Rightarrow \overline{W} = V(I(W))$
- für irreduzible, algebraische $Z \subset \mathbb{A}_k^n$:
  $U_1, U_2 \subset Z$ offen mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $U_1 \cup U_2 \neq \emptyset$: $U_1 = \emptyset$, $\overline{U_2} = Z$ oder
  $U_2 = \emptyset$, $\overline{U_1} = Z$
- Zariski-Topologie auf $\mathbb{A}_k^1$: gröbste Topologie, so dass Punkte alle abgeschlossen sind
- Zariski-Topologie auf algebraischem $Z \subset \mathbb{A}_k^n$:
  gröbste Topologie, so dass Polynome $f: Z \to \mathbb{A}_k^1$ immer stetig sind, wobei $\mathbb{A}_k^1$ mit der Zariski-Topologie versehen ist

Affine Varietäten

X, Z: Mengen, k: Körper, $\varphi: X \to Z$ und $f: Z \to k$ Abbildungen, $\varphi^*(f) := f \circ \varphi$

affine Varietät über k: $(Z, k[Z])$, wobei $k[Z]$: ein Ring von Funktionen $f: Z \to k$, der außerdem endlich erzeugte k-Algebra ist, die Erzeuger $x_1, \dots, x_n$ zulässt, so dass $\iota(z) := (x_1(z), \dots, x_n(z))$ eine Einbettung $\iota: Z \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k$ als irreduzible, algebraische Menge ist

$\varphi: X \to Z$ ist ein **Isomorphismus** zwischen affinen Varietäten X, Z
$\quad :\Leftrightarrow \varphi^*: k[Z] \to k[X]$ ist ein k-Algebren-Isomorphismus

damit:
- $Z \cong \iota(Z) =: \tilde{Z}$, $k[Z] \cong k[T_1, \dots, T_n] / I(\tilde{Z})$ „Koordinatenring"
- Z trägt die von $\iota: Z \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k$ induzierte Zariski-Topologie, d.h.
  $W \subset Z$ abgeschlossen $\Leftrightarrow W = V(I) := \{w \in Z \mid f(w) = 0 \ \forall f \in I\}$, $I \subset k[Z]$
  $\Leftrightarrow \iota(W) = \{w \in \mathbb{A}^n_k \mid f(w) = 0 \ \forall f \in \tilde{I}\}$, $I(\tilde{Z}) \subset \tilde{I} \subset k[T_1, \dots, T_n]$, $I = \tilde{I} / I(\tilde{Z})$
- **Nullstellensatz** (Version 2-4) falls $k = \bar{k}$:
  - $m \subset k[Z]$ ist maximales Ideal $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in Z$: $m = I(\{\alpha\}) := \{f \in k[Z] \mid f(\alpha) = 0\}$
  - $I \subset k[Z]$ ein Ideal $\Rightarrow$ · falls $V(I) = \emptyset$, dann ist $I = k[Z]$;
    · für jedes I: $I(V(I)) = \sqrt{I}$

Funktionenkörper

k: Körper, $(Z, k[Z])$: affine Varietät

- **Funktionenkörper** $k(Z) := \mathrm{Quot}(k[Z])$ = Körper der rationalen Funktionen auf Z
- **regulärer Punkt** $z_0 \in Z$ von $f \in k(Z)$: $\exists\, g, h \in k[Z]$ mit $h(z_0) \neq 0$, $f = \frac{g}{h}$

  $\mathcal{O}_{Z,z_0} := \{ f \in k(Z) \mid z_0 \text{ ist regulärer Punkt von } f \}$

  $=$ lokaler Ring von Z in z_0
- **Definitionsbereich** von $f \in k(Z)$:

  $\mathrm{dom}(f) := \{ z_0 \in Z \mid f \text{ ist regulär in } z_0 \}$
- für $U \subset Z$: $\mathcal{O}(U) = \mathcal{O}_Z(U) = \{ f \in k(Z) \mid \mathrm{dom}(f) \supset U \}$

$\forall f \in k(Z)$:
- $\mathrm{dom}(f) \subseteq Z$ ist offen und dicht
- falls $k = \overline{k}$:
  - $\mathcal{O}(Z) = k[Z]$
  - $\forall\, h \in k[Z]$: $\mathrm{dom}(f) \supset Z \setminus V(h)$ $\iff f \in k[Z][h^{-1}]$

Rationale Abbildungen

k: Körper, $(Y, k[Y])$: affine Varietät

RATIONALE ABBILDUNG:

- $\varphi : Y \dashrightarrow \mathbb{A}_k^m$ mit $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$, $\varphi_m \in k(Y)$,
  $\operatorname{dom}(\varphi) = \bigcap_{j=1}^{m} \operatorname{dom}(\varphi_j) = \{z \in Y \mid \varphi \text{ ist regulär in } z\}$
- $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ für eine affine Varietät $\iota : Z \hookrightarrow \mathbb{A}_k^m$,
  falls $\varphi(\operatorname{dom}\varphi) \subset Z$, $\iota \circ \varphi$ rational

$\rightarrow$ φ heißt DOMINANT, falls $\varphi(\operatorname{dom}\varphi) \subset Z$ dicht ist;
dann: $\varphi^* : k(Z) \to k(Y)$ ist ein k-Algebren- und Körper-Homomorphismus

$$\boxed{\begin{minipage}{0.9\textwidth}\end{minipage}}$$

Zu jedem k-Algebren-Homomorphismus $\Phi : k(Z) \to k(Y)$ zwischen den Funktionenkörpern $k(Y), k(Z)$ affiner Varietäten Y, Z über k gibt es eine eindeutig bestimmte rationale, dominante Abbildung $\varphi : Y \dashrightarrow Z$ mit $\Phi = \varphi^*$.

Endliche Morphismen

k: Körper, Y, Z: affine Varietäten über k, $\varphi : Y \longrightarrow Z$ ein Morphismus, $Y \neq \emptyset$

$\boxed{\varphi \text{ heißt ENDLICH, falls } k[Y] \text{ eine endliche } \varphi^*(k[Z])\text{-Algebra ist.}}$

Theorem

Falls $k = \bar{k}$ und $\varphi : Y \to Z$ endlich ist:

- $\varphi : Y \to Z$ ist ABGESCHLOSSEN, d.h. $A \subset Y$ abgeschlossen $\Rightarrow \varphi(A) \subset Z$ abgeschlossen
- Das Urbild jedes Punktes ist höchstens endlich

Spezialfall: Ist φ^* injektiv, dann ist φ surjektiv

Korollar: $\exists \varphi : Y \to \mathbb{A}^m_k$ surjektiver Morphismus mit $|\varphi^{-1}(z)| < \infty \; \forall z \in \mathbb{A}^m_k$

Nakayama-Lemma

R: Ring heißt LOKAL, falls R genau ein maximales Ideal besitzt,
nämlich $\mathfrak{m} = \{ r \in R \mid r \text{ ist keine Einheit} \}$

Beispiel: $\tilde{R}$: beliebiger Ring, $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \tilde{R}$ maximales Ideal, $S := \tilde{R} \setminus \tilde{\mathfrak{m}}$

$$\Rightarrow R := \tilde{R}[S^{-1}] \text{ ist lokal}$$

Nakayama: R: lokaler Ring, $M \neq 0$: endliche R-Algebra, $\mathfrak{m} \subset R$ maximales Ideal

$$\Rightarrow \mathfrak{m} M \neq M$$

Tangentialräume

k: Körper, $Z \subset \mathbb{A}_k^n$: affine Varietät, $z \in Z$, $m_z := I(\{z\}) \subset k[Z]$ maximales Ideal

- $f \in k[x_1, \dots, x_n]$; formale Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in k[x_1, \dots, x_n]$, $df_z(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(z) x_j \in k[x_1, \dots, x_n]$
- $T_z Z := z + \underbrace{\bigcap_{f \in I(Z)} V(df_z)}_{\text{zugrunde liegender k-Vektorraum}} \subset \mathbb{A}_k^n$, ist ein affiner Raum, der Tangentialraum an Z in $z \in Z$

Satz $m_z / m_z^2 \cong (T_z Z)^* := \left\{ \alpha : T_z Z \to k \,\middle|\, \alpha(z+v) = Av,\ A : \bigcap_{f \in I(Z)} V(df_z) \to k \text{ linear} \right\}$

Hilfssätze: Für $\tilde{m}_z := (x_1 - z_1, \dots, x_n - z_n) \subset k[x_1, \dots, x_n]$:

- $\varphi : \tilde{m}_z \longrightarrow (T_z \mathbb{A}_k^n)^*$, $p \mapsto p_z^{(1)}$ mit $p_z^{(1)}(z+v) := dp_z(v)$ ist ein surjektiver k-Vektorraum-Homomorphismus mit $\ker \tilde{m}_z^2$
- $m_z = \tilde{m}_z / I(Z)$, $m_z^2 = (\tilde{m}_z^2 + I(Z)) / I(Z)$ wobei $\tilde{m}_z^2 + I(Z) := (\tilde{m}_z^2, I(Z))$

Dimension affiner Varietäten

k: Körper, Z: affine Varietät über k, $z_0 \in Z$

Zariski-Tangentialraum von Z in z_0: $\left(m_{z_0}/m_{z_0}^2\right)^*$

Satz:
- $Z \to \mathbb{N}$, $z \mapsto \dim_k (m_z/m_z^2)$ ist bzgl. der Zariski-Topologie auf Z und der diskreten Topologie auf $\mathbb{N}$ oberhalb stetig, d.h.
  - $\forall z_0 \in Z$ $\exists U \subset Z$ offen, $z_0 \in U$, so dass: $\dim T_{z_0} Z = \max\limits_{z \in U} \{\dim T_z Z\}$
  - $Z_0 := \{z_0 \in Z \mid \dim T_{z_0} Z = \min\limits_{z \in Z} \dim T_z Z\} \subset Z$ ist offen und dicht
  - Für $z_0 \in Z$ hängt $T_{z_0} Z$ bis auf Isomorphie nur von einer offenen Umgebung von z_0 ab.

Definition

$\dim Z := \min\limits_{z \in Z} \{\dim_k T_z Z\}$ ist die DIMENSION von Z.

$z_0 \in Z$ heißt SINGULÄR (REGULÄR), falls $\dim T_{z_0} Z > \dim Z$ ($\dim T_{z_0} Z = \dim Z$).

Z heißt REGULÄR, falls Z keine singulären Punkte hat.

Dimensionstheorie: Weitere Zugänge k: Körper

Satz Endliche Morphismen φ mit injektivem Rückzug φ^* erhalten die Dimension affiner Varietäten.

Folgerung Z: affine Varietät über k $\Rightarrow$ $\dim Z = \operatorname{trdeg}_k(k(Z))$
= maximale Anzahl algebraisch unabhängiger Elemente von $k[Z]$

dabei: $k \subset L$ Körper, Transzendenzgrad $\operatorname{trdeg}_k(L)$
:= Anzahl der Elemente einer (und damit jeder) Transzendenzbasis von L über k

dabei: Transzendenzbasis $r_1, \dots, r_m$ von L über k
ist eine Menge von über k algebraisch unabhängigen Elementen von L, so dass $k(r_1, \dots, r_m) = \operatorname{Quot}(k[r_1, \dots, r_m]) =: \tilde{k} \subset L$,
L algebraisch über $\tilde{k}$

Krulldimension

X: topologischer Raum, $R \neq \{0\}$: Kring, k: Körper

Krulldimension $k\text{-dim}(X)$: Supremum aller Längen n von Ketten abgeschlossener, irreduzibler Teilmengen $\emptyset \neq X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n \subset X$

Krulldimension $k\text{-dim}(R)$: Supremum aller Längen n von Ketten von Primidealen $R \supsetneq \mathfrak{p}_0 \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_n$

Theorem

Für jede endlich erzeugte, nullteilerfreie k-Algebra R gilt:

$$k\text{-dim}(R) = \mathrm{trdeg}_k(\mathrm{Quot}(R))$$

Hilfssatz: R wie im Theorem, $(0) \neq \mathfrak{p} \subsetneq R$ Primideal

$$\Rightarrow \mathrm{trdeg}_k(\mathrm{Quot}(R/\mathfrak{p})) < \mathrm{trdeg}_k(\mathrm{Quot}(R))$$

Identifikation verschiedener Dimensionsbegriffe

k: Körper, Z: affine Varietät über k, $\mathfrak{m} \subset k[Z]$: maximales Ideal

$$\dim Z = \operatorname{trdeg}_k k(Z) = \dim k[Z] = \underbrace{\operatorname{codim}_{k[Z]}(\mathfrak{m})}_{\substack{\text{maximale Länge } m \text{ von Primidealketten} \\ \mathfrak{m} \supsetneq \mathfrak{p}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \mathfrak{p}_m}} = K\text{-}\dim(Z)$$

dazu: $\tilde{R} \subset R$ Ringe, R ganz über $\tilde{R}$, $\tilde{\mathfrak{p}} \subsetneq \tilde{\mathfrak{q}} \subsetneq \tilde{R}$: Primideale

$\Rightarrow$ es gilt:

- going up: $\mathfrak{p} \subsetneq R$ Primideal, $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \tilde{R}$
  $\Rightarrow \exists\ \mathfrak{q} \subsetneq R$ Primideal, $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \cap \tilde{R}$, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$
- falls R Nullteiler-frei und $\tilde{R}$ ganz abgeschlossen
  (d.h. $\tilde{R} \subset R' \subset \operatorname{Quot}(\tilde{R})$, R' ganz über $\tilde{R} \Rightarrow R' = \tilde{R}$):
  - going down: $\mathfrak{q} \subsetneq R$ Primideal, $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} \cap \tilde{R}$
    $\Rightarrow \exists\ \mathfrak{p} \subsetneq R$ Primideal, $\tilde{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p} \cap \tilde{R}$, $\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q}$
  - falls $\mathfrak{m} \subset R$ maximal ist:
    $\tilde{\mathfrak{m}} := \tilde{R} \cap \mathfrak{m}$ ist maximal, $\operatorname{codim}_{\tilde{R}}(\tilde{\mathfrak{m}}) = \operatorname{codim}_R(\mathfrak{m})$
- $k[x_1, \ldots, x_n]$ ist ganz abgeschlossen, da faktoriell

Krull's Hauptidealsatz

k: Körper, R: endlich erzeugte, Nullteiler-freie k-Algebra
$f \in R \setminus \{0\}$, $\mathfrak{p} \subset R$: minimales Primideal mit $f \in \mathfrak{p}$

$$\Rightarrow \operatorname{trdeg}_k(\operatorname{Quot}(R/\mathfrak{p})) = \operatorname{trdeg}_k(\operatorname{Quot}(R)) - 1$$

Hauptresultate der Dimensionstheorie:

Z: affine Varietät über dem Körper k, $Z \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ • $\dim(Z) < \infty$, $\dim(\mathbb{A}_k^m) = m$

• $Y \subset Z$ ebenfalls affin über k

$\Rightarrow$ $Y = Z$ oder $\dim Y < \dim Z$,

und falls $\dim Y \leq \dim Z - 2$: $Y \subsetneq X \subsetneq Z$

mit affinem X über k

Für jede affine Varietät Z über einem Körper k folgt:
Jede Primidealkette in $k[Z]$, die nicht weiter verfeinert werden kann, hat die gleiche Länge $m = \dim Z$