Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Fuchs'sche Differentialgleichungen
SS 12

Seminar Fuchs'sche Differentialgleichungen

Vortragsthemen

29. 4. Lineare Systeme gewöhnlicher DGL im Komplexen I
Sprecher: Florian Heß
In diesem Vortrag soll die Existenz von Lösungen von solchen DGL gezeigt werden. Der Begriff der regulären Singularität soll eingeführt werden.
Referenzen: [Walter, §§8.II, 21.II,IV, 22.V, 23.I, II] [Iwasaki, §§1.1.1 – 1.1.2]

6. 5. Lineare Systeme gewöhnlicher DGL im Komplexen II
Sprecher: Fabian Ruf
In diesem Vortrag soll die Konstruktion formaler Lösungen und deren Konvergenz erklärt werden.
Referenzen: [Walter, §§24.III, VIII, XII] [Iwasaki, §§1.1.3] Die nötigen Kenntnisse aus der linearen Algebra zum Lösen reeller linearer Differentialgleichungen werden in [Walter, 17 – 19] erklärt und müssen gegebenfalls nachgetragen werden.

13. 5. Fuchs'sche DGL und Riemannsche Symbole
Sprecher: Christoph Tröndle
In diesem Vortrag soll der Spezialfall der Fuchs'schen DGL diskutiert werden, insbesondere die Fuchs'sche Relation. Die Riemannsche DGL und das Riemannsche Symbol sollen eingeführt und der Spezialfall der Papperitz' Gleichung diskutiert werden.
Referenzen: [Walter, §§23.III, IV, V, 25.VII] [Iwasaki, §§1.1.4, 2.1.1] [Andrews, Thm. 2.3.1]

20. 5. Die hypergeometrische DGL und ihre Lösungen
Sprecher: Stephan Dierle
In diesem Vortrag betrachten wir das Standardbeispiel der hypergeometrische DGL und ihren Lösungen. Es sollen die Eulersche Integraldarstellung der Lösungen sowie die 24 Lösungen von Kummer vorgestellt werden. Falls es zeitlich drinliegt, soll die

Integraldarstellung von Mellin–Barnes ebenfalls vorgestellt werden.
Referenzen: [Walter, §§25.IX] [Iwasaki, §§2.1.2, 2.1.3, 2.3.2] [Andrews, pp. 65, 76, 77]

27. 5. Topologische Räume, Fundamentalgruppe
Sprecher: Dominik Schomas
In diesem Vortrag sollen grundlegende Begriffe der algebraischen Topologie eingeführt werden: Topologische Räume, metrische Räume, kompakte Räume, Zusammenhangskomponenten, Homotopie von Wegen, Fundamentalgruppe. Schliesslich soll die Fundamentalgruppe von $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ bestimmt werden.
Referenzen: [Freitag, §§I.0, III.4], [Jänich T, §1] [Hatcher, §§I.1, I.2]

3. 6. Der Monodromiesatz
Sprecher: Martin Maletz
In diesem Vortrag sollen die Topologie und die Theorie der Differentialgleichungen mittels des Begriffs der Monodromie in Verbindung gebracht werden. Dazu soll der Begriff der analytischen Fortsetzung mittels Kreisketten wiederholt werden. Das Ziel ist der Monodromiesatz über die Homotopieinvarianz der analytischen Fortsetzung. Damit erhalten wir einen Gruppenhomomorphismus von der Fundamentalgruppe nach $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$.
Referenzen: [Jänich F, §5], [Freitag, §III.6] [Iwasaki, §4.1]

17. 6. Monodromie der hypergeometrischen Differentialgleichung
In diesem Vortrag soll die Monodromie der hypergeometrischen Differentialgleichung explizit bestimmt werden. Dies soll mittels zwei Methoden erreicht werden: Durch Betrachten der Darstellungen der freien Gruppe in zwei Erzeugern und mit Hilfe der Eulerschen Integraldarstellung der hypergeometrischen Funktion.
Referenzen: [Iwasaki, §§4.2, 4.3, 4.7]

24. 6. Die Schwarz–Abbildung und Schwarzsche Dreiecke
In diesem Vortrag soll gezeigt werden, dass der Quotient zweier Lösungen der hypergeometrischen DGL eine bijektive, konforme Abbildung von der oberen Halbeben auf eine durch Kreisbögen berandetes Dreieck definiert. Dazu brauchen wir den Begriff der konformen Abbildung, der Möbuistransformation und das Schwarzsche Spiegelungsprinzip.
Referenzen: [Jänich F, §3.3], [Yoshida, §§III.7,8]

1. 7. Hyperbolische Geometrie
In diesem Vortrag sollen die Grundlagen der hyperbolischen Geometrie, insbesondere

das Poincaré Modell, wiederholt werden. Dazu gehören Geodätische, Isometrien, Winkel, Möbiustransformationen, hyperbolischer Flächeninhalt, Gauß–Bonnet–Formel für hyperbolische Dreiecke, Trigonometrie, Kongruenz zweier hyperbolischer Dreiecke mit gleichen Winkeln.
Referenzen: [Bär, §§4.9, 4.11] [Katok, §1] [Beardon, §7]

8. 7. Fuchssche Gruppen und Fundamentalbereiche
In diesem Vortrag soll der Zusammenhang zwischen der Gruppe der Möbiustransformationen und der Pflasterung der oberen Halbebene durch Fundamentalbereiche ausgearbeitet werden. Insbesondere soll gezeigt werden, dass die diskreten Untergruppen von $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ gerade diejenigen sind, die diskontinuierlich auf der oberen Halbebene operieren.
Referenzen: [Katok, §§2.1, 2.2, 3.1, 3.2] [Beardon, §8]

15. 7. Poincarés Satz über Fundamentalpolygone
In diesem Vortrag soll gezeigt werden, wann eine von Seitenpaarungen eines Polygons erzeugte Untergruppe von $\mathbb{P}\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ diskontinuierlich ist.
Referenzen: [Maskit] [Beardon, §9.8]

22. 7. Dreiecksgruppen
In diesem Vortrag sollen die Dreiecksgruppen untersucht werden, also die Gruppen, die von einem Dreieck mit Winkeln $\left(\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}\right)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$ herkommen.
Referenzen: [Beardon, §10.6]

Bibliography

[Andrews] Andrews, George E and Askey, Richard and Roy, Ranjan, *Special functions*, Cambridge University Press, 1999

[Bär] Bär, Christian, *Elementare Differentialgeometrie*, de Gruyter, 2010

[Beardon] Beardon, Alan F., *The geometry of discrete groups*, Springer, 1983

[Freitag] Freitag, Eberhard, *Funktionentheorie 2*, 2009

[Hatcher] Hatcher, Allen, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002

[Iwasaki] Iwasaki, Katsunori and Kimura, Hironobu and Shimomura, Shun and Yoshida, Masaaki, *From Gauss to Painlevé*, Friedr. Vieweg & Sohn, 1991

[Jänich F] Jänich, Klaus, *Funktionentheorie*, 6. Auflage, Springer, 2004

[Jänich T] Jänich, Klaus, *Topologie*, 5. Auflage, Springer, 2006

[Katok] Katok, Svetlana *Fuchsian Groups* The University of Chicago Press, 1992

[Maskit] Maskit, B, *On Poincaré's theorem for fundamental polygons*, Adv. Math, 7, 1971, 219–230

[Walter] Walter, Wolfgang, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, 7. Aufl., Springer, 2000

[Yoshida] Yoshida, Masaaki, *Hypergeometric functions, my love*, Friedr. Vieweg & Sohn, 1997