Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Elementare Differentialgeometrie
SS 13

Übungsblatt 9

Erste und zweite Fundamentalform

33. Allgemeine Kegelfläche

    Es sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ eine einfach geschlossene $\mathcal{C}^2$–Kurve mit $|\gamma| = |\dot{\gamma}| = 1$. Setze $V = [a,b] \times [0,\infty)$. Die parametrisierte Fläche $\widetilde{f}(V)$ gegeben durch $f : V \to \mathbb{R}^3, (s,t) \mapsto t\gamma(s)$ heisst allgemeine Kegelfläche mit Spitze 0.

    (a) (2 Punkte) Bestimmen Sie ein maximales offenes $W \subset V$, so dass $f := \widetilde{f}|_W$ eine injektive Immersion ist. Bestimmen Sie die erste Fundamentalform von $M := f(W)$ bezügl. f. Zeigen Sie, dass sich für jedes $t_0 > 0$ mit $W_{t_0} := W \cap ([a,b] \times [t_0, t_0 + 2\pi])$ das Flächenstück $f(W_{t_0})$ längentreu auf ein Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ abbilden lässt. Bestimmen Sie D und für die längentreue Abbildung $\Phi : f(W_{t_0}) \to D$ die Komposition $\varphi = \Phi \circ f|_{W_{t_0}}$.

    (b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die zweite Fundamentalform von M bezügl. f und zeigen Sie, dass alle Punkte von M parabolische Punkte oder Flachpunkte sind. Für welche s, t treten Flachpunkte auf ?

34. Wendelfläche

    Die parametrisierte Fläche M gegeben durch $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto (u\cos v, u\sin v, v)$ heisst Wendelfläche. Sie entsteht durch Schraubung einer horizontalen Geraden $(v = 0)$ um die z–Achse.

    (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie das Einheitsnormalenfeld ν^f und das Flächenelement bezügl. f. Für welche u, v ist f eine injektive Immersion ? Welche Richtung hat $\nu^f_x, x = \binom{0}{v}$?

    (b) (1 Punkt) Gibt es elliptische, hyperbolische, parabolische oder Flachpunkte ?

    (c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass es eine parametrisierte Rotationsfläche $\overline{M}$ gegeben durch $\overline{f} : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto (r(u)\cos v, r(u)\sin v, z(u))$ gibt, welche dieselbe erste Fundamentalform bezügl. $\overline{f}$ wie M bezügl. f hat. Bestimmen Sie die Meridiankurve $u \mapsto (r(u), z(u))$. Um welche Kurve handelt es sich ?

35. Krümmungen eines Graphen

Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $\zeta : U \to \mathbb{R}$ eine $\mathcal{C}^2$–Funktion. Betrachten Sie die Fläche

$$M := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ \zeta(x,y) \end{smallmatrix} \right) \middle| (x,y) \in U \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Führen Sie folgende Abkürzungen ein: $P = \partial_x \zeta$, $Q = \partial_y \zeta$, $R = \partial_x \partial_x \zeta$, $S = \partial_x \partial_y \zeta$, $T = \partial_y \partial_y \zeta$, wobei $\partial_x \zeta := \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ etc.

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die erste und zweite Fundamentalform bezügl. einer geeigneten Parametrisierung von M.

(b) (2 Punkte) Die Hessesche von ζ sei für $x = y = 0$ positiv definit. Zeigen Sie, dass gilt: Es gibt ein $R > 0$, so dass f für $x^2 + y^2 \leq R^2$ nach unten konvex ist, d.h. $\{(x,y,z) | x^2 + y^2 \leq R^2, z \geq \zeta(x,y)\}$ ist konvex. Hinweis: Setzen Sie $\xi(t) := \zeta(x_0 + at, y_0 + bt)$ für $0 \leq t \leq 1$ an und berechnen Sie ξ''.

(c) (1 Punkt) Geben Sie Formeln für die mittlere Krümmung H und die Gauss–Krümmung K an.

36. Translationsflächen

(4 Punkte) Es seien $\gamma_i : I_i \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2$, reguläre $\mathcal{C}^2$–Kurven mit $\dot{\gamma}_1(s_1) \times \dot{\gamma}_2(s_2) \neq 0$, für alle $(s_1, s_2) \in I_1 \times I_2$. Die parametrisierte Fläche M gegeben durch $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \gamma_1(s_1) + \gamma_2(s_2)$ heisst Translationsfläche. Betrachten Sie die spezielle Translationsfläche, die sich mit der Notation wie in Aufgabe 35 als Graph mit $\zeta(x,y) = \alpha(x) + \beta(y)$ darstellen lässt. Zeigen Sie, dass gilt: Es gibt bis auf Translation, Ähnlichkeit und Spiegelung genau eine solche Translationsfläche mit $H \equiv 0$, welche keine Ebene ist, die sogenannte Scherksche Minimalfläche. Bestimmen Sie $\alpha(x) + \beta(y)$ in einem maximalen einfachzusammenhängenden Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$.

Abgabetermin: Dienstag, 25. Juni 2013 um 12:00 Uhr