Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 8

Parametrisierte Flächen im $\mathbb{R}^3$

29. Glattheit des Graphen

    (4 Punkte) Es sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $k \geq 0$. Zeigen Sie, dass der Graph
    $$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x,y) \end{pmatrix} \middle| (x,y) \in U \right\}$$
    von f eine C^k–Untermannigfaltigkeit ist, wenn f von der Klasse C^k ist.

30. Winkeltreue

    (4 Punkte) Es sei $f : U \to M \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

    (a) f ist winkeltreu, d.h. für alle $x \in U$ und alle $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt: $\sphericalangle_x(v,w) = \sphericalangle_x^f(v,w)$.

    (b) f ist konform, d.h. es gibt eine Funktion $u : U \to (0,\infty)$ mit $g_x^f(v,w) = u(x)\langle v,w\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

31. Stereographische Projektion

    Die Abbildung $\varphi : S^2 \setminus \{e_3\} \to \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, die jedem Punkt p den Schnittpunkt q der Geraden durch p und e_3 mit der Ebene $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ zuordnet, heisst stereographische Projektion (vom Nordpol e_3).

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass φ eine bijektive Abbildung ist, und dass für $p = (y_1, y_2, y_3) \in S^2 \setminus \{e_3\}$ und $q = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ gilt:
    $$\varphi(p) = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{1-y_3} \\ \frac{y_2}{1-y_3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \varphi^{-1}(q) = \begin{pmatrix} \frac{2x_1}{||x||^2+1} \\ \frac{2x_2}{||x||^2+1} \\ \frac{||x||^2-1}{||x||^2+1} \end{pmatrix}.$$

(b) (1 Punkt) Überprüfen Sie, dass $\psi = \varphi^{-1}$ eine Parametrisierung ist.

(c) (1 Punkt) Sei $\widetilde{\varphi} : S^2 \setminus \{-e_3\} \to \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion vom Südpol $-e_3$. Bestimmen Sie $\widetilde{\varphi} \circ \psi$.

32. Erste Fundamentalform der Sphäre

Es sei $p \in S^2$ und $\psi : S^2 \setminus \{e_3\} \to \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion, $\psi = \varphi^{-1}$.

(a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $T_pS^2 = \{v \in \mathbb{R}^3 | v \perp p\}$.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Darstellung von $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ mit $v \in T_pS^2$ in der Karte ψ, falls $p \neq e_3$.

(c) (1 Punkt) Berechnen Sie die Darstellung der ersten Fundamentalform bezügl. ψ.

(d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass ψ winkeltreu ist.

Abgabetermin: Dienstag, 18. Juni 2013 um 12:00 Uhr