Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Elementare Differentialgeometrie
SS 13

Übungsblatt 4

Parametrisierte Kurven im $\mathbb{R}^2$

13. Hüllkurve, Fokalkurve einer Parabel

Im $\mathbb{R}^2$ sei eine einparametrige Geradenschar $\{g_t\}$ durch die Parameterdarstellung $g_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, g_t(u) = a(t) + u\,b(t)$ mit $b(t) \neq 0$ gegeben. (t = Scharparameter, u = Parameter auf g_t.) Dabei sind $a, b : I \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbare Abbildungen eines reellen Intervalls I.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt: Wenn die Vektoren b, b' linear unabhängig sind, dann gibt es genau eine Kurve $\gamma(t)$ mit folgenden Eigenschaften:

i. In jedem regulären Punkt $\gamma(t)$, $t \in I$, stimmt die Tangente $\{\gamma(t)+s\,\dot{\gamma}(t)|s \in \mathbb{R}\}$ von γ in $\gamma(t)$ mit der Geraden $\{g_t(u)|u \in \mathbb{R}\}$ überein.

ii. Ist $\gamma(t), t \in I$ kein regulärer Punkt, dann gilt $\gamma(t) = a(t) + u(t)b(t)$ für ein geeignetes $u(t) \in \mathbb{R}$.

γ heisst Hüllkurve der Geradenschar. (Wählen Sie dazu auf jeder Geraden g_t einen Punkt $\gamma(t) = g_t(u(t))$ und berechnen Sie $u(t)$ aus $a(t)$ und $b(t)$.)

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Hüllkurve γ der Normalen der Parabel $(t, \frac{1}{2}t^2)$. γ heisst Evolute oder Fokalkurve der Parabel. Stellen Sie γ durch eine Gleichung der Form $f(x, y) = 0$ dar, und zeichnen Sie eine Skizze der Parabel und ihrer Evolute. Vergleichen Sie mit der Neilschen Parabel ${x_0}^2 + a\,{x_1}^3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$, im $\mathbb{R}^2$.

14. Astroide

Betrachten Sie Strecken in $\mathbb{R}^2$ der Länge 1, deren Endpunkte $(\cos t, 0), (0, \sin t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ auf den Koordinatenachsen liegen. Die Hüllkurve $\gamma(t)$ der zu dieser Streckenschar gehörigen Geradenschar heisst Astroide (cf. Aufgabe 13).

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Parameterdarstellung $\gamma(t)$, alle regulären Kurvenpunkte, den Einheitsvektor T der positiven Tangentenrichtung in den regulären Punkten und die Länge der Kurve für $t \in [0, 2\pi]$.

(b) (2 Punkte) Stellen Sie die Kurve durch eine Gleichung der Form $f(x, y) = 1$ dar, zeichnen Sie eine Skizze und diskutieren Sie die Symmetrien.

15. Zykloide

Sei K die Kreislinie mit Zentrum $(0, 1)$ und Radius 1. Lässt man K auf der x–Achse abrollen, so beschreibt der auf K liegende Punkt $(0, 0)$ eine Kurve $\gamma(t)$, welche Zykloide genannt wird.

(a) (1 Punkt) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Zykloide an.

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Bogenlänge für $t \in [0, 2\pi]$.

(c) (1 Punkt) Diskutieren Sie das Verhalten der Kurve für $t = 0$ durch Betrachtung der Taylorreihe.

16. Logarithmische Spirale

(4 Punkte) Die Kurve $\gamma(t) = \mathrm{e}^{b\,t}(\cos t, \sin t)$, $b < 0$, heisst Logarithmische Spirale. Berechnen Sie die Bogenlänge $L(\gamma|_{[0,T]})$. Wie gross ist die Länge des Bogens für $T \to \infty$?

Abgabetermin: Dienstag, 14. Mai 2013 um 12:00 Uhr