Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Elementare Differentialgeometrie
SS 13

Übungsblatt 2

Sphärische, hyperbolische und projektive Geometrie

5. Dreiecksungleichung in der sphärischen Geometrie

   Es seien $p, q, r \in S^2$ drei Punkte, die nicht auf einem Grosskreis liegen. Setze $a = |\overline{qr}|, b = |\overline{pr}|, c = |\overline{pq}|$, und $\alpha = |\angle(q,p,r)|, \beta = |\angle(p,q,r), \gamma = |\angle(p,r,q)|$.

   (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass der Seitencosinussatz gilt: $\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma$.

   (b) (1 Punkt) Es sei nun $\pm p \neq \pm q \neq \pm r \neq \pm p$. Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung gilt: $|\overline{pr}| \leq |\overline{pq}| + |\overline{qr}|$.

   (c) (1 Punkt) Wann gilt in (b) Gleichheit ?

   (d) (1 Punkt) Multiplizieren sie die Seitenlängen a, b, c jeweils mit $t \in \mathbb{R}_{>0}$. Betrachten Sie die asymptotische Entwicklung der Gleichung in Aufgabe a) um $t = 0$ bis Ordnung t^2. Was erhalten Sie ?

6. Die Poincarésche Halbebene

   Es sei $\mathcal{P} = \mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$ die Poincarésche Halbebene, ein Modell für die hyperbolische Ebene. Wir definieren die Menge der Geraden $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ mit $\mathcal{G}_1 = \{\{z \in \mathcal{H} \mid \operatorname{Re} z = \alpha\} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{G}_2 = \{\{z \in \mathcal{H} \mid |z - x| = r\} \mid x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0}\}$. Für $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ definieren wir die Möbius–Transformation $\phi_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \phi_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

   (4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\phi_A(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ und $\phi_A(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ für alle $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

7. Projektive Ebene

   Eine (abstrakte) projektive Ebene ist eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$, für die folgende Axiome erfüllt sind:

   P1 Durch je zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.

P2 Je zwei verschiedene Geraden treffen sich in genau einem Punkt.

P3 Es gibt vier verschiedene Punkte, von denen keine drei auf einer Geraden liegen.

Es sei k ein Körper. Wir definieren die Punktemenge $\mathcal{P} = \{\mathrm{span}(p) \mid p \in k^3 \setminus \{(0,0,0)\}\}$ und die Geradenmenge $\mathcal{G} = \{\mathrm{span}(p,q) \mid p,q \in k^3 \setminus \{(0,0,0)\},\ p \neq q\}$. Hier steht span$(\dots)$ für den durch die Vektoren $\dots$ aufgespannten linearen Unterraum von k^3. Wir schreiben für die Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \subset)$ kurz $\mathbb{P}^2_k$.

(4 Punkte) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}^2_k$ die Axiome einer abstrakten projektiven Ebene erfüllt. $\mathbb{P}^2_k$ heisst projektive Ebene über dem Körper k. Benutzen Sie für P3 die Eigenschaft, dass jeder Körper eine 0 und eine von 0 verschiedene 1 enthält.

8. Fano–Ebene

   Es sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ die Fano–Ebene aus Aufgabe 2.

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Fano–Ebene isomorph zur projektiven Ebene über $\mathbb{F}_2 = (\{0,1\}, +, \cdot)$ ist, wobei Addition und Multiplikation modulo 2 sind. Identifizieren Sie dazu die Punkte 0, 1, 2 mit 001, 010 bzw. $100 \in {\mathbb{F}_2}^3$.

   (b) (2 Punkte) Geben Sie mit Hilfe von Aufgabe 7 eine Begründung für den Isomorphismus aus Aufgabe 2.

Abgabetermin: Dienstag, 30. April 2013 um 12:00 Uhr