Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Elementare Differentialgeometrie
SS 13

Übungsblatt 12

Hyperbolische Geometrie

45. Geodätische in der hyperbolischen Ebene

    (4 Punkte) Es sei $\mathbb{H}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{2,1} \,|\, {x_1}^2 + {x_2}^2 - {x_3}^2 = -1, x_3 > 0\}$ die hyperbolische Ebene. Zeigen Sie, dass der Schnitt jeder Ebene durch den Ursprung mit $\mathbb{H}^2$ eine Geodätische in $\mathbb{H}^2$ ist. Hinweis: Verwenden Sie analog zu Aufgabe 40 Polarkoordinaten.

46. Das Poincaré–Ballmodell

    Analog zu Aufgabe 31 definieren wir eine stereographische Projektion $\varphi : \mathbb{H}^2 \to B_1^2(0)$ mit Zentrum $-e_3$, wobei $B_1^2(0) \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ den Einheitsball bezeichnet. Dann wird die zugehörige Parametrisierung gegeben durch $f : B_1^2(0) \to \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{R}^{2,1}$ mit

    $$f(x) = \frac{1}{1 - ||x||^2} \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 1 + ||x||^2 \end{pmatrix}.$$

    (a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die erste Fundamentalform g^f und die Gauss–Krümmung von $\mathbb{H}^2$. Wir nennen g^f die hyperbolische Metrik im Poincaré-Ballmodell.

    (b) (1 Punkt) Berechnen Sie die Christoffelsymbole für das Poincaré-Ballmodell.

    (c) (1 Punkt) Es sei $\gamma : I \to \mathbb{H}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \sqrt{1 + ||x||^2} \end{pmatrix} \cosh(t) + \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} \sinh(t)$ mit $x, v \in \mathbb{R}^2$, $x \perp v$, $||v|| = 1$, eine hyperbolische Gerade. Berechnen Sie $c = \varphi \circ \gamma$.

    (d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = 0$ für $x = \binom{\alpha}{0}$ und $v = \binom{0}{1}$.

47. Die Metrik der Poincaréschen Halbebene

    Es sei $\mathcal{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, y > 0\}$ die Poincarésche Halbebene (siehe Aufgabe 6). Wir definieren auf $\mathcal{H}$ eine abstrakte erste Fundamentalform (oder Metrik) durch $g_{jk}(x + iy) = \frac{1}{y^2}\delta_{jk}$, $j, k = 1, 2$ mit $(x_1, x_2) = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) (1 Punkt) Berechnen Sie die Gauss–Krümmung.

(b) (1 Punkt) Zwei Fundamentalformen (oder Metriken) $g, \widetilde{g}$ heissen isometrisch zueinander, wenn es eine Parametertransformation $\Phi : U \to \widetilde{U}$ gibt, so dass $g_{ij} = \sum_{k,l} D\Phi_{ik} D\Phi_{jl} \widetilde{g}_{kl}$. Φ heisst dann Isometrie.

Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ Isometrien sind: $z \to w = \frac{az+b}{cz+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Cayley–Abbildung $C : \mathcal{H} \to B_1^2(0) \subset \mathbb{C}, z \to \frac{z-i}{z+i}$ eine bijektive Isometrie ist, d.h. die beiden Fundamentalformen g und g^f aus Aufgabe 46 werden durch C aufeinander abgebildet.

Bemerkung: Obwohl g nicht von einer Fläche f im $\mathbb{R}^3$ induziert wird, erlaubt es dieses Resultat dennoch die Christoffelsymbole und die Geodätischen als Grössen der inneren Geometrie von $\mathcal{H}$ zu berechnen.

48. Geodätische in der Poincaréschen Halbebene.

(a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Christoffelsymbole der Metrik g aus Aufgabe 47.

(b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Abbildung $t \mapsto it$ die Umparametrisierung einer Geodätischen ist.

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass Bilder von Geodätischen unter Isometrie wieder Geodätische sind. Schliessen Sie mit Hilfe der Aufgaben 47 und 6, dass alle Geraden aus Aufgabe 6 Bilder von Geodätischen sind.

Bemerkung: Da die Isometrien von g gerade die Möbiustransformationen aus Aufgabe 6 sind und die Gruppe der Möbiustransformationen transitiv auf $\mathcal{H}$ operiert, folgt somit, dass die Menge der Geraden $\mathcal{G}$ aus Aufgabe 6 genau die Bilder aller Geodätischen in $\mathcal{H}$ sind.

Abgabetermin: Dienstag, 16. Juli 2013 um 12:00 Uhr