Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Elementare Differentialgeometrie
SS 13

Übungsblatt 11

Krümmung

41. Krümmung konformer Metriken

Es sei $u : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, eine Funktion ohne Nullstellen. Es sei $g = u^2\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Metrik auf $U \subset \mathbb{R}^2$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sei die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) (2 Punkte)

$$\Gamma_{ij}^k = u^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\delta_{jk} + \frac{\partial u}{\partial x_j}\delta_{ik} - \frac{\partial u}{\partial x_k}\delta_{ij}\right).$$

(b) (2 Punkte)

$$K = -u^{-3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) + u^{-4}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right).$$

42. Krümmung und Gauss–Gleichung der Sphäre

Es sei $\varphi : S^2 \setminus \{e_3\} \to \mathbb{R}^2$ die stereographische Projektion aus Aufgabe 31 und $X_i = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}$, $i = 1, 2$.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die kovarianten Ableitungen $\nabla_{X_i} X_j$ für $i, j = 1, 2$ sowie den Riemannschen Krümmungstensor.

(b) (2 Punkte) Verifizieren Sie, dass die Gauss–Gleichung

$$g(R_{X,Y}Z, W) = K\ (g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W))$$

für alle Vektorfelder W, X, Y, Z auf S^2 erfüllt ist.

Hinweis: In Aufgabe 32 wurde gezeigt, dass die erste Fundamentalform g^ψ konform äquivalent im Sinne der Definition in Aufgabe 38(c) zur Standardmetrik $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf dem $\mathbb{R}^2$ ist. Wenden Sie dann das Resultat aus Aufgabe 41 an.

43. Krümmung von Rotationsflächen

Es sei M eine Rotationsfläche zu einer bogenlängenparametrisierten Kurve $\gamma = \binom{x}{z} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

(a) (2 Punkte) Bestimmen sie die Christoffelsymbole von M bezüglich der Parametrisierung $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(s,t) \mapsto \begin{pmatrix} x(s)\cos t \\ x(s)\sin t \\ z(s) \end{pmatrix}$.

(b) (1 Punkt) Berechnen sie den Krümmungstensor R aus den Christoffelsymbolen.

(c) (1 Punkt) Überprüfen Sie das Ergebnis aus (b) mit Hilfe der zweiten Fundamentalform und des Theorema Egregium.

44. Gleichungen von Gauss und Codazzi–Mainardi

(4 Punkte) Es seien $p \in U$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, mit Koordinaten $(u_1, u_2) \in U$ und $h_{ij} = h\left(\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}\right)$, $i,j = 1,2$ die zweite Fundamentalform einer parametrisierten $\mathcal{C}^2$–Fläche M. Zeigen Sie, dass die beiden Gleichungen von Gauss und Codazzi–Mainardi zu den folgenden beiden Gleichungen äquivalent sind:

$$R_{ijkl} = h_{ij}h_{kl} - h_{ik}h_{jl}, \qquad \frac{\partial h_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial u_j} = \sum_s \Gamma^s_{ik} h_{sj} - \sum_s \Gamma^s_{ij} h_{sk}.$$

Abgabetermin: Dienstag, 9. Juli 2013 um 12:00 Uhr