PROF. KATRIN WENDLAND
PD EMANUEL SCHEIDEGGER
MATHEMATISCHES INSTITUT
UNIVERSITÄT FREIBURG

ELEMENTARE DIFFERENTIALGEOMETRIE
SS 13

# Übungsblatt 10

## Allgemeine Eigenschaften von Flächen

Dies ist das letzte Übungsblatt, dass für die Zulassung
zur Klausur und das Erbringen der Studienleistung zählt.

37. Kurven auf Flächenstücken

    (4 Punkte) Es sei $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, deren Bild ganz innerhalb eines parametrisierten $\mathcal{C}^2$–Flächenstücks $f : U \to \mathbb{R}^3$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, verläuft. Das Darboux–Dreibein $E_1, E_2, E_3$ sei definiert durch $E_1(s) = \dot{\gamma}(s), E_2(s) = E_3(s) \times E_1(s), E_3(s) = \nu(\gamma(s))$. Dabei ist $E_2$ die Kurvennormale innerhalb der Fläche, und $\nu = E_3 = E_1 \times E_2$ bezeichnet die Einheitsnormale an die Fläche. Zeigen Sie, dass für dieses Dreibein die folgenden Ableitungsgleichungen gelten, die den Frenet–Gleichungen entsprechen:

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ \dot{E}_2 \\ \dot{E}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_G & \kappa_\nu \\ -\kappa_G & 0 & \tau_G \\ -\kappa_\nu & -\tau_G & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

    Dabei treten die folgenden Grössen auf: $\kappa_G = \langle \ddot{\gamma}, E_2 \rangle$ (die geodätische Krümmung), $\kappa_\nu = h_\gamma(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$ (die Normalkrümmung) sowie eine geodätische Torsion $\tau_G$. Geben Sie eine Formel für $\tau_G$ an.

38. Dritte Fundamentalform

    Es sei $f : U \to M$, $U \subset \mathbb{R}^2$ offen, ein parametrisiertes $\mathcal{C}^2$–Flächenstück $M \subset \mathbb{R}^3$ mit Gauss–Abbildung $\nu^f : U \to S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist die dritte Fundamentalform von $f$ definiert als Bilinearform $i_p = g_p(S_p(\cdot), S_p(\cdot))$ auf $T_pM$, wobei $S_p$ der Weingarten–Operator von $M$ im Punkt $p \in M$ ist.

    (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt: $i_p - 2H_p h_p + K_p g_p = 0$, wobei $g_p$ und $h_p$ die erste bzw. zweite Fundamentalform bezeichnen. Betrachten Sie dazu

$g_p((S_p - \kappa_1 \mathrm{id})(X_i), (S_p - \kappa_2 \mathrm{id})(X_j))$ für zwei verschiedene Vektoren $X_1, X_2 \in T_pM$, wobei $\kappa_1, \kappa_2$ die Hauptkrümmungen bezeichnen.

(b) (1 Punkt) Was besagt der Satz von Cayley–Hamilton für die Weingarten–Abbildung ?

(c) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass gilt: Falls $f$ eine Minimalfläche parametrisiert, für die überall $K \neq 0$ gilt, dann ist die Gauss–Abbildung $\nu^f$ eine Parametrisierung eines zu $M$ konform äquivalenten Flächenstücks. (Zwei auf $U$ parametrisierte Flächenstücke $f, \widetilde{f} : U \to \mathbb{R}^3$ heissen konform äquivalent, falls $g_x^f, g_x^{\widetilde{f}}$ für alle $x \in U$ positive Vielfache voneinander sind.)

39. Lie–Klammer

(4 Punkte) Sei $f : V \to M$ eine Parametrisierung einer $\mathcal{C}^2$–Fläche $M$, und seien $X, Y$ tangentiale Vektorfelder auf $M$. Jedes tangentiale Vektorfeld $Z$ werde von $Z_f : V \to \mathbb{R}^2$ bezüglich $f$ dargestellt, d.h. $Z_{f(x)} = Df_x(Z_x^f)$. (Man sagt auch, dass $Z$ und $Z^f$ $f$–verwandt sind.) Es bezeichne $[\cdot, \cdot]$ sowohl die Lie-Klammer auf $\mathbb{R}^2$ als auch auf $M \subset \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass gilt: $[X, Y]^f = [X^f, Y^f]$.

40. Christoffel–Symbole der Sphäre

Es sei $f : \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to S^2, f(\alpha, \beta) = (\cos\alpha\cos\beta, \sin\alpha\cos\beta, \sin\beta)$ die Parametrisierung der Sphäre durch Polarkoordinaten. Es seien $X_1 = \frac{\partial}{\partial\alpha}, X_2 = \frac{\partial}{\partial\beta}$.

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Ableitungen $DX_i(X_j)$, für $i, j = 1, 2$. Wann sind diese Vektoren tangential ?

(b) (2 Punkte) Berechnen Sie mit Hilfe von (a) die kovarianten Ableitungen $\nabla_{X_i} X_j$, und die Christoffel–Symbole $\Gamma_{ij}^k$ für $i, j, k = 1, 2$.

Abgabetermin: Dienstag, 2. Juli 2013 um 12:00 Uhr