Prof. Katrin Wendland
PD Emanuel Scheidegger
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Elementare Differentialgeometrie
SS 13

Übungsblatt 1

Axiome der Geometrie

1. Fano–Ebene
   Die folgende Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ wird als Fano–Ebene bezeichnet:

   - Punktmenge $\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
   - Geradenmenge $\mathcal{G} = \{\{i, i+2, i+3\} \bmod 7 \,|\, i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$.
   - Inzidenz: Für $p \in \mathcal{P}$, $g \in \mathcal{G}$ gilt: pIg genau dann, wenn $p \in g$.

   (a) (3 Punkte) Verifizieren Sie die Inzidenzaxiome I1 bis I4.

   (b) (1 Punkt) Zeichnen Sie eine Skizze dieser Geometrie.

2. Duale Fano–Ebene
   Es seien $\mathcal{P}$, $\mathcal{G}$ und I wie in Aufgabe 1. Betrachten Sie die Inzidenzstruktur $(\mathcal{G}, \mathcal{P}, I^{-1})$.

   (4 Punkte) Zeigen Sie, daß diese Inzidenzstruktur isomorph zu derjenigen in Aufgabe 1 ist, indem sie einen expliziten Isomorphismus angeben, wie Punkte auf Geraden und Geraden auf Punkte abgebildet werden. Dieser Isomorphismus ist nicht eindeutig.

3. Aussenwinkelsatz der euklidischen Geometrie

   Für drei Punkte $x, y, z \in \mathbb{R}^2$, die nicht auf einer Geraden liegen, definieren wir den Innenwinkel $\gamma \in [0, \pi]$ als die eindeutige Zahl, für die $\cos\gamma = \frac{\langle y-x, z-x\rangle}{||y-x||\cdot||z-x||}$ gilt. Den Aussenwinkel definieren wir als den Nebenwinkel eines Innenwinkels.

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass zwei Winkel genau dann kongruent sind, wenn sie denselben Innenwinkel haben.

   (b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass ein beliebiger Aussenwinkel eines jeden Dreiecks so gross ist wie die Summe der beiden nichtanliegenden Innenwinkel dieses Dreiecks. Benutzen Sie dazu den Gegenwinkelsatz aus der Übungsstunde.

4. Halbwinkelsatz der euklidischen Geometrie

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass gilt: $\tan^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{1+\cos(2t)}$.

   (b) (2 Punkte) Es seien $p, q, r \in \mathbb{R}^2$ drei paarweise verschiedene Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Setze $a = |\overline{pq}|$, $b = |\overline{pr}|$, $c = |\overline{qr}|$ und $\alpha = \angle(p, r, q)$. Beweisen Sie mit Hilfe von (a):

$$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(a+b+c)(-a+b+c)}.$$

Abgabetermin: Dienstag, 23. April 2013 um 12:00 Uhr