# Lösungsvorschlag zum Übungsblatt 11

Funktionentheorie, Sommersemester 2012

Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

## Aufgabe 1

1. Uns interessiert der Imaginärteil von $\frac{e^{iz}}{z}$. Dieser Integrand hat einen Pol erster Ordnung bei null und ist dort von der Form

$$\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \dots.$$

Das verrät uns, dass nur der erste Summand zum Integral um den Halbkreisbogen um die null beiträgt (die anderen Terme fallen für $\varepsilon \to 0$ weg). Dieser liefert $-\pi i a_{-1}$. Wir wollen das Integral über $\mathbb{R} \setminus \{-\varepsilon, \varepsilon\}$ für $\varepsilon \to 0$ berechnen. Die Idee ist nun, von dem Integral im Hinweis den großen Halbkreisbogen und den kleinen Halbkreisbogen um die null abzuziehen. Das Residuum von $\frac{e^{iz}}{z}$ bei $z = 0$, also $a_{-1}$ ist 1. Nach der Grenzwertbildung gibt nur das einen Beitrag. Also erhalten wir:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2. Für ausreichend groes $r$ betrachten wir die folgende geschlossene Kurve in der positiv geschlitzten Ebene: Diese verlaufe zuerst von $i/r$ nach $r + i/r$, dann auf dem Halbkreisbogen $\alpha_r$ um null nach $r - i/r$ und von dort auf der Strecke nach $-i/r$ und schlussendlich auf dem links verlaufenden Halbkreisbogen $\beta_r$ nach $i/r$ zurück. Mit dem Residuensatz müssen wir die folgenden Integrale berechnen:

$$\left( \int_{i/r}^{r+i/r} + \int_{\alpha_r} + \int_{r-i/r}^{-i/r} + \int_{\beta_r} \right) \frac{z^{1/2}}{1+z^2}.$$

Für $r \to \infty$ konvergiert das erste Integral gegen das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$$

und das dritte gegen

$$\int_\infty^0 e^{\frac{1}{2}(ln(x)+2\pi i)} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx.$$

Das zweite und das vierte Integral konvergieren gegen null. Berechnen wir die Residuen in den Nullstellen des Zählers $\pm i$ erhalten wir mit der Residuenformel

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{2\pi i}{2} \left( \frac{\sqrt{i}}{2i} + \frac{\sqrt{-i}}{-2i} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

## Aufgabe 2

Um den *Satz von Rouché* zu zeigen, betrachten wir die Funktionen $ht(z) := g(z) + t(f(z) - g(z))$ fr $t \in [0,1]$. Nach Voraussetzung folgt

$$|h_t(\xi)| \geq |g(\xi)| - |f(\xi) - g(\xi)| > 0$$

für alle $\xi \in \gamma$. Die Funktionen $h_t$ sind also holomorph in $G$ und nullstellenfrei auf $\gamma$. Nach der Anzahlformel für die Nullstellen ergibt sich also (für $0 \leq t \leq 1$):

$$Anz_{h_t}(0,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h_t'(\xi)}{h_t(\xi)} d\xi.$$

Dieser Ausdruck ist ganzzahlig und hängt stetig von $t$ ab, ist also unabhängig von $t$. Insbesondere gilt $Anz_{h_0}(0,\gamma) = Anz_{h_1}(0,\gamma)$ und damit die Behauptung.

## Aufgabe 3

$2z^4 - 5z + 2$ besitzt vier Nullstellen. Wir wenden den *Satz von Rouché* mit dem Einheitskreis als Weg an: Für $|z| = 1$ gilt $|-5z+2| > 2|z|^4$. Also haben $2z^4 - 5z + 2$ und $-5z+2$ in der Einheitskreisscheibe eine Nullstelle. Die anderen drei Nullstellen von $2z^4 - 5z + 2$ liegen außerhalb.

## Aufgabe 4

1. Die Pole der meromorphen Funktion

$$f(z) = \frac{\pi}{sin(\pi z)}$$

sind bei $z = n \in \mathbb{Z}$ zu finden. Für den Pol bei $z = 0$ schreiben wir $f(z) = z^{-1} g(z)$ mit der bei $z = 0$ holomorphen Funktion

$$g(z) = \frac{\pi z}{sin(\pi z)}$$

. Der Pol ist also erster Ordnung. Die Laurentreihenentwicklung im Ringgebiet $\{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$ ist von der Form

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots.$$

Mit Hilfe der Periodizität $f(z-n) = (-1)^n f(z)$ ergeben sich die Hauptteile fr $n \in \mathbb{Z}$ zu:

$$\frac{(-1)^n}{z-n}.$$

2. Wir haben die Potenzreihenentwicklung

$$\frac{(-1)^n}{z-n} = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(1+\frac{z}{n}+z^2n^2+\dots\right).$$

Die konstante Partialsumme ist

$$\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Für $|z| \leq r$ mit $r > 0$ gilt

$$\left|\frac{(-1)^n}{z-n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| \leq \frac{2r}{n^2}$$

für $n \geq 2r$. Die Reihe

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n\neq 0}\left(\frac{(-1)^n}{z-n} + \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

konvergiert demnach normal und insbesondere lokal gleichmäßig. Folgende Umordnung ist daher erlaubt:

$$g(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{z-n} + \frac{(-1)^n}{z+n}\right).$$

3. Mit der Partialbruchentwciklung für $\pi cot(\pi z)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \\
&= \pi\cot\frac{\pi z}{2} - \pi\cot(\pi z) \\
&= \frac{2}{z} + \sum_{n>0}\left(\frac{1}{z/2-n} + \frac{1}{z/2+n}\right) - \frac{1}{z} - \sum_{n>0}\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n>0}\left(\frac{2}{z-2n} - \frac{1}{z-n} + \frac{2}{z+2n} - \frac{1}{z+n}\right) \\
&= \frac{1}{z} + \sum_{n>0}(-1)^n\left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n}\right) = g(z).
\end{aligned}$$

Da die Reihen konvergent sind dürfen wir gliedweise addieren.