Übungsblatt 10

Funktionentheorie, Sommersemester 2012

Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: zuletzt Donnerstag, 12.7.2012, 12 Uhr

Hinweis: Bei den Aufgaben 3 und 4 dürfen die Ergebnisse der vorausgegangenen Aufgaben ohne Beweis verwendet werden.

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe des Residuensatzes:

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\,dx \;=\; \frac{\pi}{6}$$

2. $$\int_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5}\,dx \;=\; \frac{\pi}{8}\left(\sqrt{5}-1\right)$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Mit $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bezeichnen wir die Riemannsche Zahlenkugel. Eine Möbiustransformation ist eine rationale Funktion

$$f_A : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}},\; f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Gl}_2(\mathbb{C}).$$

1. Zeigen Sie, dass jede Möbiustransformation eine bijektive Abbildung der Riemannschen Zahlenkugel auf sich selbst definiert, wobei $f_A = f_{\lambda A}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

2. Beweisen Sie, dass die Menge der Möbiustransformationen eine Gruppe bezüglich der Hintereinanderausführung von Abbildungen ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

1. Bestimmen Sie die Möbiustransformation $F : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, die drei paarweise verschiedene Punkte $z_0, z_1, z_\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ wie folgt abbildet:

$$F(z_0) = 0, \quad F(z_1) = 1, \quad F(z_\infty) = \infty.$$

Ist F eindeutig ? Betrachten Sie zunächst den Fall, dass keiner der drei Punkte den Wert ∞ annimmt, d.h. $z_0, z_1, z_\infty \in \mathbb{C}$. Danach setzen Sie jeweils einen der drei Punkte auf ∞.

2. Zeigen Sie, dass für alle Paare von Tripeln, $z_0, z_1, z_\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ und $w_0, w_1, w_\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ (jeweils paarweise verschiedene Punkte), eine eindeutige Möbiustransformation F existiert, so dass $F(w_i) = z_i$ für $i = 0, 1, \infty$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Für drei paarweise verschiedene Punkte $z_0, z_1, z_\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ und $z \in \overline{\mathbb{C}}$ definiert man das Doppelverhältnis

$$\mathrm{DV}(z, z_0, z_1, z_\infty) \;=\; \frac{z - z_0}{z - z_\infty} \cdot \frac{z_1 - z_\infty}{z_1 - z_0} \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Zeigen Sie, dass jede Möbiustransformation $F : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ das Doppelverhältnis erhält,

$$\mathrm{DV}(F(z), F(z_0), F(z_1), F(z_\infty)) = \mathrm{DV}(z, z_0, z_1, z_\infty).$$