Übungsblatt 9

Funktionentheorie, Sommersemester 2012

Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: zuletzt Donnerstag, 5.7.2012, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Beweisen Sie die folgenden Rechenregeln für das Residuum $\mathrm{res}_{z_0}(f)$ der holomorphen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ an der Stelle $z_0 \in D \subset \mathbb{C}$:

1. Ist z_0 ein Pol der Ordnung k von f, so gilt
$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{g^{(k-1)}(z_0)}{(k-1)!} \quad \text{mit} \quad g(z) = (z-z_0)^k f(z),$$
2. Seien p, q holomorphe Funktionen auf D. Ist z_0 eine Nullstelle erster Ordnung von q und $p(z_0) \neq 0$, so gilt
$$\mathrm{res}_{z_0}(f) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \quad \text{für} \quad f = \frac{p}{q},$$
3. Ist g eine nicht identisch verschwindende meromorphe Funktion und $f = g'/g$, so ist $\mathrm{res}_{z_0}(f)$ gleich der Ordnung von g in z_0.

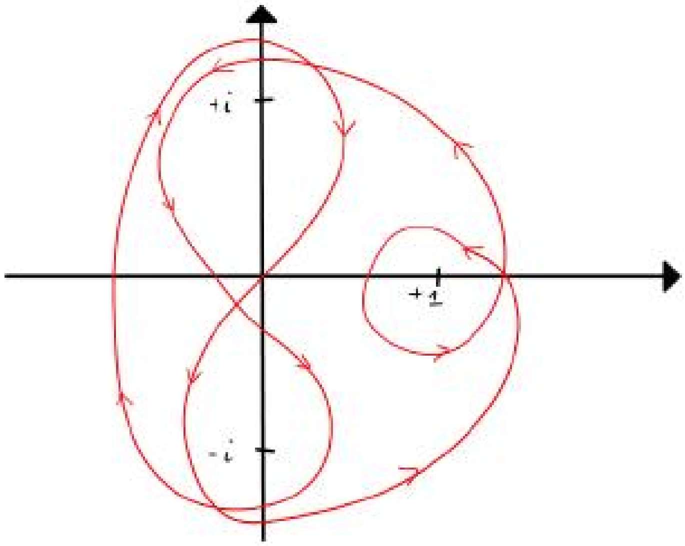
Aufgabe 2 (4 Punkte)

Für die durch die folgenden Formeln definierten Funktionen bestimme man jeweils in allen ihren Singularitäten die Residuen:

1. $$\frac{1-\cos(z)}{z^2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2},$$
2. $$\frac{\exp(z)}{(z-1)^2} \quad \text{und} \quad z\exp\left(\frac{1}{1-z}\right).$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Berechnen Sie das Integral der Funktion
$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$$
entlang des folgenden Weges γ auf der komplexen Zahlenebene:



Aufgabe 4 (4 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Integrale deren Wert mit Hilfe des Residuensatzes:

1. $$\int_{\partial B_2(0)} \frac{\exp(2z)}{z(z-1)^2}\,dz,$$

2. $$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos(t))^2}{2+\sin(t)}\,dt.$$