Übungsblatt 7

Funktionentheorie, Sommersemester 2012

Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: zuletzt Donnerstag, 21.6.2012, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

1. Sei $\mathbb{C}_{LR} = \mathbb{C} \setminus (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$ die links- und rechts geschlitzte Ebene und $\mathbb{C}_L = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ die links geschlitzte Ebene. Überzeugen Sie sich davon, dass die holomorphe Funktion $h : \mathbb{C}_{LR} \to \mathbb{C}, h(z) = \sqrt{1-z^2}$ mit dem auf $\mathbb{C}_L$ definierten Hauptzweig der Wurzel wohldefiniert ist.

2. Zeigen Sie, dass der Hauptzweig des Arcussinus in einer Umgebung der Null gegeben ist durch:

$$\arcsin(z) = -i \ln(iz + \sqrt{1-z^2}),$$

wobei wir die Hauptzweige des Logarithmus und der Wurzel verwenden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet.

1. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathscr{M}(G,\mathbb{C})$ aller meromorphen Funktionen auf G mit der üblichen Addition und Multiplikation von Funktionen einen Körper bildet.

2. Sei $\nu_{z_0} := \nu_{z_0}(f)$ die Ordnung einer meromorphen Funktion $f \in \mathscr{M}(G,\mathbb{C})$ in $z_0 \in G$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \nu_{z_0} : (\mathscr{M}(G,\mathbb{C}),\cdot) \setminus \{0\} & \longrightarrow & (\mathbb{Z},+) \\ f & \longmapsto & \nu_{z_0}(f) \end{array}$$

ein Homomorphismus Abelscher Gruppen ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\overline{B}_r(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ mit $r > 0$. Wir betrachten zwei nirgends verschwindende stetige Funktionen $f, g : \overline{B}_r(0) \to \mathbb{C}$, die auf $B_r(0)$ holomorph sind und deren Beträge auf dem Rand übereinstimmen:

$$|f(z)| = |g(z)|, \text{für alle } z \in \partial B_r(0).$$

Zeigen Sie, dass es eine Konstante $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gibt, so dass gilt: $f = \lambda g$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beweisen Sie das Lemma von Schwarz: Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Abbildung der offenen Einheitskreisscheibe auf sich selbst mit $f(0) = 0$. Dann gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle z. Sei ferner $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$ oder $|f'(0)| = 1$, so ist f eine Drehung.