Übungsblatt 6

Funktionentheorie, Sommersemester 2012

Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: zuletzt Donnerstag, 14.6.2012, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei f eine ganze Funktion. Beweisen Sie mit dem Satz von Liouville:

1. Gibt es ein $M > 0$ mit $\mathrm{Re}(f(z)) \leq M$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.
2. Gibt es über $\mathbb{R}$ linear unabhängige Zahlen $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ mit
$$f(z + \omega_1) = f(z) = f(z + \omega_2)$$
für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.
3. Ist $|f(z)| \leq M \cdot |z|^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$, so ist f ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich n.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe in $\mathbb{C}$ mit Konvergenzradius r. Man zeige:

1. Existiert $R := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, dann ist $r = R$.
2. Existiert $\rho := \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$, so ist $r = 1/\rho$.
3. Ist $\tilde{\rho} := \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \in [0, \infty]$, dann gilt $r = 1/\tilde{\rho}$ (mit $1/0 = \infty$ und $1/\infty = 0$).

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Für die durch die folgenden Ausdrücke definierten Funktionen f und Punkte $a \in \mathbb{C}$ bestimme man jeweils den Definitionsbereich, die Taylorreihe zum Entwicklungspunkt a und deren Konvergenzradius.

1. $f(z) = \exp(z)$ mit $a = 1$,
2. $f(z) = 1/z$ mit $a = 1$,
3. $f(z) = 1/(z^2 - 5z + 6)$ mit $a = 0$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei f eine holomorphe Funktion auf einer offenen Menge U und $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to U$ zwei Wege mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$, die in U zueinander homotop sind mit festen Endpunkten. Zeigen Sie unter Verwendung des entsprechenden Resultats für sternförmige Gebiete, dass

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz.$$

Benutzen Sie hierfür, dass jede kompakte Menge in $\mathbb{C}$ durch endlich viele sternförmige Gebiete überdeckt werden kann.