Übungsblatt 3

Funktionentheorie, Sommersemester 2012

Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe ausnahmsweise: zuletzt Freitag, 18.5.2012, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

1. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ offen. Sei die Funktion $f = u + iv$ in D komplex differenzierbar und seien ihr Real- und Imaginärteil, also u und v, in D zweimal reell stetig differenzierbar.[1] Zeigen Sie, dass in D gilt:

$$\Delta u = \Delta v = 0,$$

wobei $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Funktionen u, v, die dieser partiellen Differentialgleichung genügen, nennen wir harmonisch.

2. Wir betrachten das reelle Polynom $u(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Bestimmen Sie alle reellen Koeffizienten a, b, c, so dass $u(x+iy)$ der Realteil einer holomorphen Funktion $f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy)$ ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

1. $\int_\gamma |z| dz$, γ verläuft geradlinig von $-i$ nach i,
2. $\int_\gamma |z| dz$, γ verläuft auf dem Rand der Einheitskreisscheibe von $-i$ nach i,
3. $\int_\gamma \bar{z}^3 dz$, $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq \pi$,
4. $\int_\gamma \frac{z}{(z^2+4)^2} dz$, für jeden Weg γ in $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2i\}$ von z_1 nach z_2,
5. $\int_\gamma \frac{sin(z)}{z} dz$, $\gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

[1] Wir werden sehen, dass die letzte Voraussetzung überflüssig ist, da holomorphe Funktionen beliebig oft komplex differenzierbar sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Welche der folgenden komplexen Funktionen besitzen eine Stammfunktion im angegebenen Bereich? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \overline{z}$,
2. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = Re(z)$,
3. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = |z|^2$,
4. $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = z^{-1}$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

1. Leiten Sie eine Darstellung des komplexen Kurvenintegrals $\int_\gamma f(z)dz$ einer Funktion $f = u + iv$ durch reelle Integrale her.
2. Veranschaulichen Sie sich, dass das komplexe Kurvenintegral kein direktes Analogon des reellen Kurvenintegrals ist: Zeigen Sie dazu genauer, dass der Ansatz

$$\int_0^1 Re(f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt + i\int_0^1 Im(f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$$

   für die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z$ und den Weg $\gamma(t) = t + it, t \in [0,1]$ nicht gleich dem Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)dz$ ist.