Übungsblatt 2

Funktionentheorie, Sommersemester 2012

Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: zuletzt Donnerstag, 10.5.2012, 12 Uhr

Definition

Wir nennen eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ mit $U \subset \mathbb{C}$ holomorph, wenn sie in jedem Punkt $z_o \in U$ komplex differenzierbar ist.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist auf $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph.

b) Sind $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so auch ihre Komposition $f \circ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

c) Sind $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so auch ihr Produkt $f \cdot g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

d) Sind $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph, so ist auch ihr Quotient $\frac{f}{g}$ auf $\mathbb{C} - g^{-1}(0)$ holomorph. Benutzen Sie für Ihren Beweis die Aussagen a) bis c).

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Berechnen Sie die Wirtinger-Ableitungen $\partial/\partial z$, $\partial/\partial \bar{z}$ folgender Funktionen:

a) $\bar{z}^2 z^3$, b) $|z|^2$, c) $\mathrm{Im}(z)$, d) $e^{\bar{z}}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Beweisen Sie, dass die sogenannte Cayley-Transformation

$$z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

die obere Halbebene $\mathbf{H} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ auf die offene Einheitskreisscheibe $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ abbildet.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir wollen zeigen, dass jede holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine konforme Abbildung, also lokal winkelerhaltend ist. Hierfür betrachten wir zwei glatte Kurven $\alpha, \beta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \mathbb{C}$ mit $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$, welche unter f auf die Kurven $\tilde{\alpha} = f \circ \alpha, \tilde{\beta} = f \circ \beta : (-\varepsilon, +\varepsilon) \to \mathbb{C}$ abgebildet werden. Zeigen Sie, dass die Vektoren $\alpha'(0)$ und $\beta'(0)$ den gleichen Winkel einschliessen wie ihre Bildvektoren $\tilde{\alpha}'(0)$ und $\tilde{\beta}'(0)$.