Übungsblatt 1

Funktionentheorie, Sommersemester 2012

Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: zuletzt Donnerstag, 3.5.2012, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ zusammen mit der bekannten Addition und der Multiplikation

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

ein Körper ist. Diesen Körper bezeichnen wir mit $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die komplexe Konjugation $z = x + iy \mapsto \bar{z} = x - iy$ ein Automorphismus des in Aufgabe 1 erklärten Körpers $\mathbb{C}$ ist, also eine bijektive Abbildung, die die Körpereigenschaften erhält.

2. Ist $z \mapsto \bar{z}$ eine $\mathbb{R}-$ respektive $\mathbb{C}-$lineare Abbildung? Was bewirkt die komplexe Konjugation geometrisch in der Gaußschen Zahlenebene $\mathbb{C}$?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

1. Leiten Sie mit Hilfe der Reihenentwicklungen für die Exponentialfunktion, den Sinus und den Cosinus die Eulerformeln:

$$cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

   mit $z \in \mathbb{C}$ her.

2. Zeigen Sie dann die Relation

$$rcos(\varphi) + irsin(\varphi) = re^{i\varphi}$$

   mit $r = |z|$ und $\varphi \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Die Konvergenz der Potenzreihen dürfen sie ohne Beweis voraussetzen.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir fassen die durch $z \mapsto \bar{z}$ erklärte Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ als reelle Funktion $\widehat{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auf. Berechnen Sie die zu $\widehat{f}$ gehörende Jacobische. Ist die Funktion f komplex differenzierbar?

Entscheiden Sie desweiteren, welche der folgenden komplexen Funktionen komplex differenzierbar sind:

1. $f(z) = z^n$,
2. $f(z) = (\bar{z})^n$,
3. $f(z) = |z|^2$

mit $n \in \mathbb{Z}, n \geq 0$.