Übungsblatt 5

Funktionentheorie, Sommersemester 2012

Prof. Katrin Wendland
Dr. Oliver Fabert, Dipl.-Phys. Magnus Engenhorst

Abgabe: zuletzt Mittwoch, 6.6.2012, 12 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei U ein Gebiet in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Eine stetige Funktion $\ln : U \to \mathbb{C}$ mit $\exp(\ln(z)) = z$ für alle $z \in U$ heisst ein stetiger Zweig des Logarithmus. Man zeige:

1. Jeder weitere stetige Zweig $\widetilde{\ln}$ hat die Gestalt $\widetilde{\ln} = \ln + 2\pi ik$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
2. Jeder stetige Zweig ln des Logarithmus ist sogar beliebig oft komplex differenzierbar, und es gilt $\ln'(z) = 1/z$.
3. Auf U existiert genau dann ein stetiger Zweig des Logarithmus, wenn die Funktion $f(z) = 1/z$ eine Stammfunktion auf U hat.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

1. Beweisen Sie, dass die Funktion $f(z) = 1/z$ auf jedem der Gebiete $U_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$, $U_2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) > 0\}$ und $U_3 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}$ eine Stammfunktion besitzt.
2. Zeigen Sie unter Verwendung der ersten Teilaufgabe, dass f auf der geschlitzten Ebene $U = \mathbb{C}\backslash\ell$ mit $\ell = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \leq 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0\}$ eine Stammfunktion F besitzt.
3. Kann $F : \mathbb{C}\backslash\ell \to \mathbb{C}$ stetig zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ definierten Funktion fortgesetzt werden ?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

1. Sei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass für die Umlaufzahlen von γ und $g \circ \gamma$ um $z = 0$ gilt: $\mathrm{Uml}(g \circ \gamma, 0) = n \cdot \mathrm{Uml}(\gamma, 0)$.
2. Es sei $p(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_n)^{m_n}$ mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$ und $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{a_1, \ldots, a_n\}$ ein beliebiger geschlossener Weg. Zeigen Sie, dass
$$\mathrm{Uml}(p \circ \gamma, 0) = m_1 \cdot \mathrm{Uml}(\gamma, a_1) + \ldots + m_n \cdot \mathrm{Uml}(\gamma, a_n).$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $f : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\overline{B_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$, welche auf der offenen Einheitskreisscheibe sogar holomorph ist. Beweisen Sie unter Verwendung der gleichmässigen Konvergenz von Funktionenfolgen, dass

$$\int_{\partial \overline{B_1(0)}} f(z)\, dz \;=\; 0$$

mit $\partial \overline{B_1(0)} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.