Lösungen zu Blatt 12

Aufgabe 12-1:
Wir betrachten die Polynome

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 \quad \text{und} \quad g(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2) \\ g(x) &= (x-1)(x^2+2). \end{aligned}$$

Wir bezeichnen das Minimalpolynom von A mit $P_A(x)$. Da $f(A) = g(A) = 0$ ist, teilt das Minimalpolynom $P_A(x)$ sowohl $f(x)$ als auch $g(x)$ und damit gilt:

$$P_A(x) = x - 1,$$

$$\text{also} \quad P_A(A) = A - I = 0 \quad \text{und damit} \quad A = I.$$

Es erfüllt also nur die Einheitsmatrix I die beiden Gleichungen, und dieses Ergebnis stimmt für Matrizen beliebiger Größe, nicht nur für (7×7)-Matrizen.

Aufgabe 12-2:
Wir bringen zuerst die Matrix A auf Jordannormalform, d.h. wir finden eine invertierbare Matrix R mit

$$RAR^{-1} = J,$$

wobei

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{pmatrix}$$

mit Jordankästchen J_i ist. Wir definieren für jedes $i = 1, ..., r$ die Matrizen

$$T_i := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

wobei T_i dieselbe Größe wie der Jordanblock J_i habe. Weiter definieren wir die Matrix

$$T := \begin{pmatrix} T_1 & & \\ & \ddots & \\ & & T_r \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich gilt:

$$T_i = {}^T T_i = T_i^{-1} \quad \text{und} \quad T = {}^T T = T^{-1}.$$

Außerdem gilt:

$$T_i J_i T_i^{-1} = {}^T J_i \qquad \text{für alle } i = 1, ..., r$$

und damit

$$TJT^{-1} = {}^T J.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} {}^T A &= {}^T(R^{-1}JR) = ({}^T R)({}^T J)({}^T R^{-1}) \\ &= ({}^T R)TJT^{-1}({}^T R^{-1}) = (({}^T R)TR)(R^{-1}JR)(R^{-1}T^{-1}({}^T R^{-1})) \\ &= (({}^T R)TR)A(({}^T R)TR)^{-1} \end{aligned}$$

Mit $S := ({}^T R)TR$ folgt also

$${}^T A = SAS^{-1}.$$

Aufgabe 12-3:
Beweis A normal $\Rightarrow HU = UH$:
Wir berechnen

$$\begin{aligned} &A({}^T\overline{A}) = (HU)({}^T\overline{(HU)}) = HU({}^T\overline{U})({}^T\overline{H}) = H^2 \\ &({}^T\overline{A})A = {}^T\overline{(HU)}(HU) = ({}^T\overline{U})({}^T\overline{H})HU = ({}^T\overline{U})H^2U = ({}^T\overline{U})HU({}^T\overline{U})HU. \end{aligned}$$

Da A normal ist, folgt nach Definition

$$H^2 = ({}^T\overline{U})HU({}^T\overline{U})HU = K^2$$

mit $K := ({}^T\overline{U})HU$. Sowohl H als auch K sind nach Voraussetzung bzw. nach Konstruktion Hermitesch und positiv definit, also unitär diagonalisierbar mit reellen, positiven Eigenwerten. Wir zeigen, dass jeder Eigenvektor von H auch Eigenvektor von K zum gleichen Eigenwert ist, um $H = K$ zu beweisen.

Es sei also $v \neq 0$ mit $Hv = \lambda v$ und $\lambda > 0$. Wir definieren $y := Kv - \lambda v$ und erhalten daraus

$$\lambda^2 v = H^2 v = K^2 v = K(\lambda v + y) = \lambda(\lambda v + y) + Ky,$$

also $Ky = -\lambda y$. Da $-\lambda < 0$ und K positiv definit ist, kann aber y kein Eigenvektor von K zum Eigenwert $-\lambda$ sein. Also folgt $y = 0$ und somit $Kv = \lambda v$, d.h. v ist auch Eigenvektor von K zum Eigenwert λ.
Da demnach H und K auf einer Basis aus Eigenvektoren übereinstimmen, sind sie gleich, d.h. $H = ({}^T\overline{U})HU$. Linksmultiplikation mit U liefert $UH = HU$.

Beweis $HU = UH \Rightarrow A$ normal:
Wir berechnen:

$$\begin{aligned}
A({}^T\overline{A}) &= (HU)({}^T\overline{(HU)}) = HU({}^T\overline{U})({}^T\overline{H}) = H^2 \\
({}^T\overline{A})A &= {}^T\overline{(HU)}(HU) = {}^T\overline{(UH)}(UH) = ({}^T\overline{H})({}^T\overline{U})UH = H^2
\end{aligned}$$

Also ist A normal.

Aufgabe 12-4:
Das charakteristische Polynom lautet:

$$\chi(\lambda) = \lambda^4 - 1.$$

Die Nullstellen sind $1, -1, i, -i$. Da alle Eigenwerte verschieden sind, hat die komplexe Jordannormalform folgende Gesalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix}.$$

Die reelle Normalform lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 12-5:
a) Nein. Aus $rang(A) = 2$ folgt $Ker(A) = 1$ und $A^2 = 0$ ist äquivalent zu $Im(A) \subset Ker(A)$. Gäbe es so ein A, dann wäre der 2-dimensionale Vektorraum $Im(A)$ ein Unterraum des 1-dimensionalen Vektorraums $Ker(A)$.
b) Ja, z.B.:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$