Prof. Dr. Katrin Wendland
Jan Schlüter

SS 2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II

Blatt 9

Abgabetermin: **Do, 14.07.2011, 8:00 Uhr**

Aufgabe 9-1: (4 Punkte)
a) Geben Sie ein Beispiel einer normalen komplexen Matrix, die weder hermitesch noch unitär ist.
b) Geben Sie ein Beispiel einer normalen reellen Matrix, die weder symmetrisch noch orthogonal ist.
c) Geben Sie ein Beispiel einer normalen reellen Matrix, die weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch noch orthogonal ist.

Aufgabe 9-2: (4 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus und $r \in \mathbb{R}$ mit $|r| \geq 2$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
a) $f^{ad} = f^2 - (r-1)f$
b) f ist normal und alle Eigenwerte von f sind aus $\{0, r\}$.

Aufgabe 9-3: (4 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $\mathcal{N}$ die Menge aller normalen, invertierbaren Endomorphismen von V. Ist $\mathcal{N}$ bezüglich der Komposition eine Gruppe?

Aufgabe 9-4 Fortsetzung von Aufgabe 7-4 und Aufgabe 8-4: (4 Punkte)
Wir definieren $\widetilde{\mathrm{SO}(3)} := \{x \in \mathbb{H} \mid x \cdot \overline{x} = 1\}$. Weiter definieren wir die Abbildung

$$\pi : \widetilde{\mathrm{SO}(3)} \longrightarrow \mathrm{SO}(3), \quad x \mapsto \Phi_x.$$

Hierbei ist Φ_x wie in Aufgabe 8-4 definiert. Zeigen Sie, dass die Abbildung π ein surjektiver Gruppenhomomorphismus mit Kern isomorph zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass 1 *ein Eigenwert zu jedem* $f \in \mathrm{SO}(3)$ *ist.*