Prof. Dr. Katrin Wendland
Jan Schlüter SS 2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II
Blatt 8
Abgabetermin: **Do, 07.07.2011, 8:00 Uhr**

Aufgabe 8-1: (4 Punkte)
Sei V ein euklidischer oder unitärer endlich-dimensionaler Vektorraum und $f, g \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:
a) Sind f und g selbstadjungiert, so gilt:

$$f \circ g \text{ ist selbstadjungiert} \Leftrightarrow f \circ g = g \circ f.$$

b) Ist f selbstadjungiert und nilpotent, so ist $f = 0$.
c) Ist $f^2 = 1$, so gilt:

$$f \text{ ist orthogonal} \Leftrightarrow f \text{ ist selbstadjungiert.}$$

Aufgabe 8-2: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Eine Norm $\|\cdot\|$ auf einem reellen oder komplexen Vektorraum V ist genau dann von einem Skalarprodukt induziert (d.h. es existiert $\langle\cdot,\cdot\rangle$, mit $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$ für alle $v \in V$), falls sie die Parallelogrammgleichung

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

erfüllt.

Aufgabe 8-3: (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & -\frac{5}{8} & -\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{7}{8} \end{pmatrix}$$

orthogonal ist und berechnen Sie ihre Normalform in $\mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(4 \times 4)$.

Aufgabe 8-4 Fortsetzung von Aufgabe 7-4: (4 Punkte)
Wir identifizieren wie in Aufgabe 7-4 unter der Abbildung φ den $\mathbb{R}^3$ mit $Im(\mathbb{H})$. Weiter definieren wir die (quaternionelle) Konjugation durch

$$\overline{a_e e + a_i i + a_j j + a_k k} := a_e e - a_i i - a_j j - a_k k \qquad \text{für } a_e, a_i, a_j, a_k \in \mathbb{R}$$

und den Realteil durch

$$Re(a_e e + a_i i + a_j j + a_k k) := a_e \quad \text{für } a_e, a_i, a_j, a_k \in \mathbb{R}.$$

1. Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{H}$ gilt:

   (a) $x \cdot \overline{x} = \|x\|^2$,

   (b) $Re(x \cdot \overline{y}) = \langle x, y \rangle$,

   wobei $\| \cdot \|$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die Euklidische Norm und das Euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^4$ bezeichnen.

2. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{H}$ mit $x \cdot \overline{x} = 1$ die Abbildung φ_x mit

   $$\varphi_x : Im(\mathbb{H}) \longrightarrow \mathbb{H}, \quad y \mapsto x \cdot y \cdot \overline{x}$$

   einen Endomorphismus von $Im(\mathbb{H})$ definiert, so dass $\Phi_x := \varphi^{-1} \circ \varphi_x \circ \varphi$ ein Element von SO(3) ist.