Prof. Dr. Katrin Wendland
Jan Schlüter

SS 2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II
Blatt 7
Abgabetermin: **Do, 30.06.2011, 8:00 Uhr**

Aufgabe 7-1: (4 Punkte)
Sei A eine komplexe Matrix. Zeigen Sie:
a) $A(^T\overline{A})$ ist hermitesch.
b) Ist A invertierbar, so ist $A(^T\overline{A})$ positiv definit.

Aufgabe 7-2: (4 Punkte)
Beschreiben Sie durch Angabe der möglichen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ alle orthogonalen (2×2)-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(2).$$

Wir definieren die *spezielle orthogonale Gruppe*

$$\mathrm{SO}(n) := \{A \in \mathrm{O}(n) \mid det A = 1\}$$

und

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$S^1 \to \mathrm{SO}(2), \quad x + iy \mapsto \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$$

bijektiv ist. Beschreiben Sie unter dieser Identifikation die Matrixmultiplikation der SO(2) als Multiplikation auf der S^1. Folgern Sie weiter, dass die Elemente der SO(2) unitäre Endomorphismen von $\mathbb{C}$ beschreiben. Es gilt:

$$\mathrm{U}(1) \cong S^1 \cong \mathrm{SO}(2).$$

Aufgabe 7-3: (4 Punkte)
Beschreiben Sie alle reellen (2×2)-Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit

$$\langle Ax, Ay\rangle \|x\| \|y\| = \langle x, y\rangle \|Ax\| \|Ay\| \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^2,$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt und $\|\cdot\|$ die Standardnorm bezeichnet. Machen Sie sich klar, dass diese Matrizen eine Gruppe G bilden. (Das müssen Sie nicht beweisen.) Geben Sie, ähnlich wie in Aufgabe 7-2, einen Gruppenisomorphismus von der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf die Gruppe $SG := \{A \in G \mid detA > 0\}$ an.
Anmerkung: Sie haben soeben die Gruppe SG mit der Gruppe der komplexlinearen Isomorphismen von $\mathbb{C}$ identifiziert.

Aufgabe 7-4: (4 Punkte)
Wir bezeichnen die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$ mit $\{e,i,j,k\}$. Wir definieren auf $\mathbb{R}^4$ eine Multiplikation durch

$$(a_e e + a_i i + a_j j + a_k k) \cdot (b_e e + b_i i + b_j j + b_k k) = \sum_{r,s\in\{e,i,j,k\}} a_r b_s rs,$$

wobei die Relationen

$$\begin{aligned} &e^2 = e, \quad ei = i = ie, \quad ej = j = je, \quad ek = k = ke,\\ &i^2 = j^2 = k^2 = -e,\\ &ij = -ji = k, \quad ki = -ik = j, \quad jk = -kj = i \end{aligned}$$

gelten. Die Elemente a_r und b_s bezeichnen hierbei selbstverständlich beliebige Elemente aus $\mathbb{R}$. Man nennt den $\mathbb{R}^4$ mit dieser Multiplikation die Algebra der *Quaternionen* $\mathbb{H}$. Wir definieren den Imaginärteil $Im(h)$ von $h \in \mathbb{H}$ durch

$$Im(a_e e + a_i i + a_j j + a_k k) = a_i i + a_j j + a_k k.$$

Weiter definieren wir $Im(\mathbb{H}) = span(i,j,k) \subset \mathbb{H}$. Wir identifizieren $Im(\mathbb{H})$ mit dem $\mathbb{R}^3$ durch den Vektorraumisomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^3 \to Im(\mathbb{H})$, der die Standardbasis auf die Basis $\{i,j,k\}$ abbildet. Beweisen Sie, dass das Kreuzprodukt $x \times y$ von $x, y \in \mathbb{R}^3$ unter dieser Identifikation dem Imaginärteil des Produktes $x \cdot y$ in $\mathbb{H}$ entspricht, also dass

$$\varphi(x \times y) = Im(\varphi(x) \cdot \varphi(y))$$

gilt.