Prof. Dr. Katrin Wendland
Jan Schlüter SS 2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II

Blatt 6

!!! Abgabetermin: **Mi, 22.06.2011, 18:00 Uhr** !!!

Aufgabe 6-1: (4 Punkte)
Seien V und W unitäre (bzw. euklidische) Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie:
a) $(f^{ad})^{ad} = f$.
b) Für Orthonormalbasen B von V und B' von W gilt:

$$M_B^{B'}(f^{ad}) = {}^T\overline{M_{B'}^{B}(f)}.$$

Aufgabe 6-2: (4 Punkte)
Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Beweisen Sie für Unterräume $U_1, U_2 \subset V$:

a)	$(U_1^\perp)^\perp$	$=$	U_1
b)	$U_1 \subset U_2$	$\Leftrightarrow$	$U_2^\perp \subset U_1^\perp$
c)	$(U_1 + U_2)^\perp$	$=$	$U_1^\perp \cap U_2^\perp$
d)	$(U_1 \cap U_2)^\perp$	$=$	$U_1^\perp + U_2^\perp$

Aufgabe 6-3: (4 Punkte)
Sei V ein unitärer oder euklidischer Vektorraum und $\pi \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:
a) π ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn $1-\pi$ eine orthogonale Projektion ist.
b) π ist genau dann eine orthogonale Projektion, wenn die Jordannormalform von π eine Diagonalmatrix mit Einträgen aus $\{0, 1\}$ ist und eine orthonormale Jordanbasis existiert.

Aufgabe 6-4: (4 Punkte)
Sei $U \subset \mathbb{R}^6$ der von den Vektoren

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\5\\0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\2\\7\\1\\1\\3\end{pmatrix} \quad \in \mathbb{R}^6$$

aufgespannte Unterraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.