Prof. Dr. Katrin Wendland
Jan Schlüter SS 2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II
Blatt 5
Abgabetermin: Do, 07.06.2011, 8:00 Uhr

Aufgabe 5-1: (4 Punkte)
Erinnern Sie sich an den Dualraum $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraumes V aus Lineare Algebra I. Wir betrachten die Basis

$$B = \{ \begin{pmatrix} 1\\1\\0\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\1\\1\\0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\1\\1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\1\\1\\0\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\1\\1\\0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1\\0\\0\\0\\0\\0\\1 \end{pmatrix} \}$$

des $\mathbb{R}^7$ und die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^7$, die in der Basis B durch die Matrix

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7\\ 2&3&4&5&6&7&8\\ 3&4&5&6&7&8&9\\ 5&5&5&5&5&5&5\\ 7&6&5&4&3&2&1\\ 8&7&6&5&4&3&2\\ 9&8&7&6&5&4&3 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Geben Sie die Matrix der dualen Abbildung $f^* : (\mathbb{R}^7)^* \to (\mathbb{R}^7)^*$ bezüglich der dualen Basis B^* an.

Aufgabe 5-2: (4 Punkte)
a) Eine Teilmenge $\{v_1, ..., v_m\} \subset \mathbb{C}^n$ heißt ein *Orthogonalsystem*, wenn $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq m$ gilt. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v_1, ..., v_m$ eines Orthogonalsystems linear unabhängig sind, falls der Vektor v_i für jedes $1 \leq i \leq m$ ungleich dem Nullvektor ist.
b) Sei $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ symmetrisch oder schiefsymmetrisch. Zeigen Sie:

$$Im(A) = (ker(\overline{A}))^{\perp} \qquad \text{und} \qquad ker(A) = (Im(\overline{A}))^{\perp}.$$

Hinweis: Das orthogonale Komplement ist hierbei bezüglich des Standard Hermiteschen Produktes des $\mathbb{C}^n$ gebildet. Sie dürfen den Hinweis zur Aufgabe 4-4 wieder verwenden.

Aufgabe 5-3: (4 Punkte)
Wir definieren die Mengen

$$\mathrm{O}(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \mid {}^T\!AA = 1\} \qquad \text{und}$$
$$\mathrm{U}(n) := \{A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \mid {}^T\overline{A}A = 1\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{O}(n)$ und $\mathrm{U}(n)$ mit der Matrixmultiplikation Gruppen bilden und dass diese für $n \geq 2$ nicht kommutativ sind. Man nennt $\mathrm{O}(n)$ die *orthogonale Gruppe* und $\mathrm{U}(n)$ die *unitäre Gruppe*.

Aufgabe 5-4: (4 Punkte)
Eine Bilinearform $b : V \times V \to \mathbb{K}$ heißt *nicht entartet*, wenn für jedes $v \in V$ ein $w \in V$ existiert, so dass $b(v, w) \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass für eine schiefsymmetrische und nicht entartete Bilinearform b auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V über einem Körper der Charakteristik $p \neq 2$ eine Basis $\{e_1, f_1, e_2, f_2, ..., e_n, f_n\}$ von V mit folgenden Eigenschaften existiert:

- $b(e_i, e_j) = 0$ für alle $i, j = 1, ..., n$.
- $b(e_i, f_j) = \delta_{ij}$ für alle $i, j = 1, ..., n$.

Insbesondere ist also die Dimension von V gerade.
Hinweis: Beweisen Sie zuerst $b(v, v) = 0$ für alle $v \in V$. Außerdem dürfen Sie ohne Beweis verwenden, dass für das orthogonale Komplement

$$W^\perp := \{v \in V \mid b(v, w) = 0 \quad \forall w \in W\}$$

eines Unterraums $W \subset V$ bezüglich der nicht entarteten Bilinearform b Folgendes gilt: Ist $b|_{W \times W}$ nicht entartet, so ist $b|_{W^\perp \times W^\perp}$ nicht entartet und es gilt $W \oplus W^\perp = V$.