Prof. Dr. Katrin Wendland
Jan Schlüter

SS 2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II

Blatt 4

!!! Abgabetermin: **Mi, 01.06.2011, 18:00 Uhr** !!!

Aufgabe 4-1: (6 Punkte)
Wir bezeichnen das Minimalpolynom einer Matrix A mit P_A und das charakteristische Polynom von A mit χ_A.
a) Berechnen Sie das Minimalpolynom der Matrix A aus Aufgabe 3-3.
b) Sei $P = (\lambda - 1)^4(\lambda - 2)^2 \in \mathbb{C}[\lambda]$.

1. Geben Sie ein Beispiel einer komplexen Matrix A mit $\chi_A = P_A = P$ an. Wie viele Ähnlichkeitsklassen solcher Matrizen gibt es?

2. Geben Sie zwei nicht ähnliche komplexe (7×7)-Matrizen A und B, mit $P_A = P_B = P$ an. Wie viele Ähnlichkeitsklassen solcher Matrizen gibt es?

3. Geben Sie sämtliche Jordannormalformen J_i, mit $P_{J_i} = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$ und $\chi_{J_i} = P$ an.

4. Geben Sie sämtliche Jordannormalformen J_i, mit $P_{J_i} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$ und $\chi_{J_i} = P$ an.

Aufgabe 4-2: (2 Punkte)
Sei b eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$b\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)\right) = 9 \qquad \text{und} \qquad b\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\right) = -b\left(\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)\right).$$

Berechnen Sie $b\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\right)$.

Aufgabe 4-3: (4 Punkte)
a) Eine Bilinearform b auf einem Vektorraum V heißt schiefsymmetrisch, wenn $b(v, w) = -b(w, v)$ für alle $v, w \in V$ gilt. Zeigen Sie, dass sich jede Bilinearform auf einem Vektorraum über einem Körper der Charakteristik $\neq 2$ eindeutig als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Bilinearform schreiben lässt.
b) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über dem Körper $\mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass ${}^T\!xAx = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Zeigen Sie, dass für $x, y \in \mathbb{K}^n$ Folgendes gilt:

$${}^T\!xAv = {}^T\!yAv \quad \text{für alle} \quad v \in \mathbb{K}^n \quad \Leftrightarrow \quad x = y.$$

Aufgabe 4-4: (4 Punkte)
Eine komplexe Matrix A heißt unitär, wenn ${}^T\overline{A}A = 1$ ist. Mit $\langle -, - \rangle$ bezeichnen wir das Standardskalarprodukt des $\mathbb{C}^n$, d.h. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$. Beweisen Sie für eine unitäre $(n \times n)$-Matrix A folgende Aussagen:
a) $\langle Ax, y \rangle = \left\langle x, A^{-1}y \right\rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$.
b) Ist λ ein Eigenwert von A, so ist $|\lambda| = 1$.
c) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind orthogonal zueinander.
d) Die Matrix A ist unitär diagonalisierbar, d.h. es existiert eine unitäre Matrix S, so dass $SA({}^T\overline{S})$ diagonal ist.
Hinweis: Folgende Aussage dürfen Sie ohne Beweis benutzen: Das orthogonale Komplement $W^\perp$ eines m-dimensionalen Untervektorraums $W \subset \mathbb{C}^n$ ist definiert durch

$$W^\perp := \{v \in \mathbb{C}^n \mid \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall w \in W\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Dies ist ein $(n-m)$-dimensionaler Untervektorraum mit $W \oplus W^\perp = \mathbb{C}^n$.