Prof. Dr. Katrin Wendland
Jan Schlüter SS 2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II

Blatt 3

Abgabetermin: Do, 26.05.2011, 8:00 Uhr

Aufgabe 3-1: (3 Punkte)
Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ die Jordan-Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{C}).$$

Aufgabe 3-2: (5 Punkte)
Erinnern Sie sich an die Definition der Exponentialfunktion aus Analysis I:

$$\exp(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k.$$

Wir möchten in dieser Aufgabe unter anderem zeigen, dass man exp auch als Abbildung $\mathrm{Mat}(n, \mathbb{C}) \to \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ auffassen kann, indem man die Einsetzungsabbildung verwendet.

a) Berechnen Sie $\exp(D)$, wobei D eine Diagonalmatrix mit den Einträgen $d_1, ..., d_n$ auf der Diagonalen ist.

b) Berechnen Sie $\exp(J)$, wobei $J = J(0, n_i)$ ein Jordan-Block der Länge n_i zum Eigenwert 0 ist.

c) Sind $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ mit $AB = BA$ und $m \in \mathbb{N}$, so gilt:

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}.$$

d) Seien $A, B \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ mit $AB = BA$. Nehmen Sie an, dass sowohl $\exp(A)$ als auch $\exp(B)$ existiert. Zeigen Sie:

$$\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B).$$

(Insbesondere existiert somit auch $\exp(A + B)$.)

e) Zeigen Sie mit Hilfe der Jordan-Normalform, dass $\exp(A)$ für eine beliebige Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{C})$ existiert.

Aufgabe 3-3: (4 Punkte)
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -16 & 8 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(6, \mathbb{C}).$$

Berechnen Sie $\exp(A)$.
Hinweis: Betrachten Sie die zwei Blöcke getrennt.

Aufgabe 3-4: (4 Punkte)
Wir definieren

$$i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{R}).$$

a) Berechnen Sie $\exp(\varphi i)$ für $\varphi \in \mathbb{R}$.
b) Zeigen Sie, dass $i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine Drehung um 90 Grad und dass $\exp(\varphi i)$ eine Drehung um den Winkel φ im Bogenmaß ist.