Prof. Dr. Katrin Wendland
Jan Schlüter SS 2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II
Blatt 2
Abgabetermin: Do, 19.05.2011, 8:00 Uhr

Aufgabe 2-1: (4 Punkte)
Berechnen Sie das charakteristische Polynom folgender $(n \times n)$-Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2-2: (4 Punkte)
Welche der folgenden Matrizen sind diagonalisierbar. Geben Sie eine Diagonalform an oder begründen Sie, warum die Matrix nicht diagonalisierbar ist.
a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Ein Jordan-Block der Länge $j > 1$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

c) Eine $(n \times n)$-Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Aufgabe 2-3: (4 Punkte) (vgl. Aufgabe 1-4)
a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ ein Endomorphismus mit 0 als einzigem Eigenwert. Dann ist f nilpotent.

b) Geben Sie ein Beispiel eines nilpotenten Endomorphismus $f : \mathbb{C}^6 \to \mathbb{C}^6$ an, so dass $f^5 \neq 0$ ist.

Aufgabe 2-4: (4 Punkte)
Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(4, \mathbb{C}).$$

a) Geben Sie für jeden verallgemeinerten Eigenraum von A eine Basis an.
b) Bestimmen Sie eine Matrix S, so dass SAS^{-1} eine Matrix in Jordan-Form ist.
c) Berechnen Sie ohne Computer die Matrix A^{100}.