Prof. Dr. Katrin Wendland
Dr. Jan Schlüter SS 2011

Übungsaufgaben zur Linearen Algebra II
Blatt 11
Abgabetermin: **Do, 28.07.2011, 8:00 Uhr**

Aufgabe 11-1: (4 Punkte)
Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\1\\1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3\\1\\0\\1\\1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1\\4\\0\\0\\1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1\\1\\2\\1\\1 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 1\\1\\1\\2\\1 \end{pmatrix}$$

und

$$w_1 = \begin{pmatrix} 4\\4\\3\\3\\3 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3\\3\\2\\2\\2 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 2\\3\\2\\2\\2 \end{pmatrix}, \quad w_4 = \begin{pmatrix} 9\\10\\7\\7\\7 \end{pmatrix}$$

Vektoren im $\mathbb{R}^5$. Wir setzen

$$A := \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \rangle \qquad \text{und} \qquad B := \langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle,$$

wobei $< \cdots >$ den affin linearen Span bezeichnet.
a) Berechnen Sie eine affine Basis von $A \cap B$.
b) Welcher der affinen Unterräume $A, B, A \cap B$ des $\mathbb{A}^5(\mathbb{R})$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^5$?

Aufgabe 11-2: (4 Punkte)
Seien G, N und H Gruppen. Wir sagen G ist ein semidirektes Produkt von N mit H, falls ein $\kappa \in \mathrm{Hom}(H, \mathrm{Aut}(N))$ existiert, so dass $G = N \rtimes_\kappa H$ ist. Hierbei ist die Gruppe $N \rtimes_\kappa H$ wie in der Vorlesung definiert, d.h. sie ist die Menge $N \times H$ mit der Verknüpfung

$$(n, h) \cdot (n', h') = (n \cdot \kappa(h)(n'), h \cdot h').$$

a) Zeigen Sie: Ist G ein semidirektes Produkt von N mit H, so besitzt G eine zu N isomorphe normale Untergruppe.
b) Eine *kurze Sequenz von Gruppen*

$$1 \to A_1 \xrightarrow{\iota} A_2 \xrightarrow{\pi} A_3 \to 1$$

besteht aus Gruppen A_1, A_2, A_3 und Gruppenhomomorphismen $\iota : A_1 \to A_2$ und $\pi : A_2 \to A_3$. Eine solche Sequenz heißt *exakt*, wenn ι injektiv,

π surjektiv und $Im(\iota) = Ker(\pi)$ ist. Zeigen Sie, dass G genau dann ein semidirektes Produkt von N mit H ist, falls eine kurze exakte Sequenz von Gruppen

$$1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} H \to 1$$

und ein Homomorphismus $\varphi : H \to G$ existiert, so dass $\pi \circ \varphi = id_H$ gilt.

Aufgabe 11-3: (4 Punkte)
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.
a) Geben Sie eine Bijektion zwischen den $(1,1)$-Tensoren auf $\mathbb{K}^n$ und der Menge der Matrizen $\mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n \times n)$ an.
b) Geben Sie eine Bijektion zwischen den $(2,2)$-Tensoren auf $\mathbb{K}^n$ und den $(1,1)$-Tensoren auf $\mathbb{K}^{n^2}$ an.
c) Fassen Sie die $(n \times n)$-Matrizen $A = (a_{ij})_{i,j}$ und $B = (b_{ij})_{i,j}$ als $(1,1)$-Tensoren auf $\mathbb{K}^n$ auf und beschreiben Sie den $(2,2)$-Tensor $A \otimes B$ auf $\mathbb{K}^n$ als $(n^2 \times n^2)$-Matrix.

Aufgabe 11-4: (4 Punkte)
a) Erklären Sie, wie man die Determinantenfunktion

$$det : \mathrm{Mat}_{\mathbb{K}}(n \times n) \longrightarrow \mathbb{K}$$

als $(0,n)$-Tensor auf $\mathbb{K}^n$ auffassen kann.
b) Man nennt $(0,n)$-Tensoren auch n-Linearformen. Zeigen Sie, dass der Vektorraum der alternierenden n-Linearformen auf $\mathbb{K}^n$ eindimensional ist.
Hinweis: Sie dürfen die Ergebnisse aus dem Paragraphen „Determinante“ aus Linearer Algebra I verwenden.