Übungsblatt 12

Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 19. Juli – 23. Juli 2010
Abgabe: spätestens Freitag, 16. Juli 2010, 10:00 Uhr
in die Box "Funktionentheorie" im Gebäude L1

Aufgabe 1

1. Bestimmen Sie die Polstellen und die zugehörigen Hauptteile der Laurentreihen für die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion

$$f(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

2. Geben Sie für die in Punkt 1 erhaltenen Mittag–Leffler Daten diejenige Lösung $g(z)$ des Mittag–Leffler Problems an, in der die zu subtrahierenden Partialsummen (P_ν, siehe Vorlesung, Beweis von Satz 11.3) konstant sind. Prüfen Sie die gleichmäßige Konvergenz!

3. Zeigen Sie $f(z) = g(z)$. (Hinweis: Verwenden Sie die Relation $1/\sin z = \cot \frac{z}{2} - \cot z$ und setzen Sie die Partialbruchentwicklung

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n>0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{z+n} \right),$$

(vgl. Satz 11.5 aus der Vorlesung) als bekannt voraus.

Aufgabe 2 Gegeben seien zwei ganze Funktionen f und g ohne gemeinsame Nullstellen. Zeigen Sie, dass zwei ganze Funktionen a und b existieren, sodass $af+bg = 1$. (Hinweis: Man verwende eine auf $\mathbb{C}$ meromorphe Abbildung M mit folgenden Eigenschaften: (1) die Pole von M liegen genau an den Nullstellen von g, und (2) bei jeder Nullstelle z_n von g sind die Hauptteile von M und $1/fg$ gleich. Existiert eine meromorphe Funktion M mit diesen Eigenschaften? Setzen Sie $a = Mg$.)

Gutes Gelingen bei der Klausur am Samstag, 31. Juli 2010, 9:00, HS1 (HZ C)!