Übungsblatt 11

Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 12. Juli – 16. Juli 2010
Abgabe: spätestens Freitag, 9. Juli 2010, 10:00 Uhr
in die Box "Funktionentheorie" im Gebäude L1

Aufgabe 1

1. Bestimmen Sie die Möbiustransformation F_A (mit $A \in GL(2,\mathbb{C})$), die drei paarweise verschiedene Punkte $z_0, z_1, z_\infty \in \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ wie folgt abbildet:
$$F_A(z_0) = 0, \quad F_A(z_1) = 1, \quad F_A(z_\infty) = \infty.$$
Ist F_A eindeutig? Betrachten Sie zunächst den Fall, dass keiner der drei Punkte den Wert ∞ annimmt, d.h. $z_0, z_1, z_\infty \in \mathbb{C}$. Danach setzen Sie jeweils einen der drei Punkt auf ∞.

2. Zeigen Sie, dass für alle Paare von Tripel, $z_1, z_2, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ und $w_1, w_2, w_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ (jeweils paarweise verschiedene Punkte), eine eindeutige Möbiustransformation F_D existiert, sodass $w_i = F_D(z_i)$ für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2 Für drei paarweise verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3 \in \bar{\mathbb{C}}$ und $z \in \bar{\mathbb{C}}$ wird
$$\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z - z_1}{z - z_3}\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \in \bar{\mathbb{C}}$$
das Doppelverhältnis genannt (vgl. Aufgabe 1). Zeigen Sie, dass für eine beliebige Möbiustransformation F_A
$$\mathrm{DV}(z, z_1, z_2, z_3) = \mathrm{DV}(F_A(z), F_A(z_1), F_A(z_2), F_A(z_3))$$
gilt.

Aufgabe 3 Es sei $\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ die Einheitssphäre mit Nordpol $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$ und Südpol $S = (0, 0, -1) \in \mathbb{S}^2$. Weiters sei $\mathbb{S}^2_+ = \mathbb{S}^2 \backslash \{N\}$, $\mathbb{S}^2_- = \mathbb{S}^2 \backslash \{S\}$ und $\mathbb{S}^2_\times = \mathbb{S}^2 \backslash \{N, S\}$.

Die zum Nord- bzw. Südpol assoziierten, stereographischen Projektionen seien definiert durch
$$\begin{array}{rcl} \sigma_\pm \ : \ \mathbb{S}^2_\pm & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ (x_1, x_2, x_3) & \mapsto & \dfrac{\pm x_1 + i x_2}{1 \mp x_3}. \end{array}$$

1. Bestimmen Sie die "Übergangsfunktion" f zwischen den komplexen Ebenen assoziiert mit den beiden stereographischen Projektionen, d.h.
$$\begin{array}{ccccc} f : \mathbb{C}^\times & \xrightarrow{\sigma_+^{-1}} & \mathbb{S}^2_\times & \xrightarrow{\sigma_-} & \mathbb{C}^\times, \\ \Psi & & & & \Psi \\ u & & \mapsto & & v = f(u). \end{array}$$

2. Wie verändert sich die Übergangsfunktion, wenn man an Stelle von σ_- die Projektion $\sigma'_- : \mathbb{S}^2_- \to \mathbb{C}, (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{x_1+ix_2}{1+x_3}$ verwendet.

3. Welche Übergangsfunktion bekommt man, wenn man die stereographischen Projektionen mittels folgender Verschiebungen und Drehstreckungen ändert:

$$\sigma_+ : (x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{1}{c}\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} - \frac{d}{c}$$

$$\sigma_- : (x_1, x_2, x_3) \mapsto -\frac{1}{c}\frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3} + \frac{a}{c}$$

wobei $a, c, d \in \mathbb{C}$ und $c \neq 0$.