Übungsblatt 09

Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 28. Juni – 2. Juli 2010
Abgabe: spätestens Freitag, 25. Juni 2010, 10:00 Uhr
in die Box "Funktionentheorie" im Gebäude L1

Aufgabe 1 Es sei U offen und $z_0 \in U$. Die holomorphe Funktion $f : U\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ sei meromorph in z_0 mit Polordnung n, d.h. $f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{res}_{z_0}(f) = \frac{g^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}.$$

Aufgabe 2 Prüfen Sie, ob die folgenden bestimmten Integrale wohldefiniert sind und, falls ja, bestimmen Sie deren Wert mit Hilfe des Residuensatzes:

1. $$\int_0^{2\pi} \frac{(\cos t)^2}{2 + \sin(t)} dt,$$
2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^3 + 5x^2 - 7x + 1} dx,$$
3. $$\int_{\partial B_2(0)} \frac{e^{2z}}{z(z-1)^2} dz,$$
4. $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2 + a^2} dk, \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}, \quad 0 < a \in \mathbb{R}.$$

   (Hinweis: Fallunterscheidung bzgl. des Vorzeichens von $x \in \mathbb{R}$.)

Aufgabe 3

1. Es seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynome mit $\operatorname{grad}(p) \leq \operatorname{grad}(q) - 2$, und $N(q)$ sei die Nullstellenmenge von q. Falls $N(q)$ keine reellen Nullstellen enthält gilt Satz 9.7:
   $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{z \in N(q), \operatorname{Im}(z) > 0} \operatorname{res}_z \left(\frac{p(z)}{q(z)} \right).$$
   Wenn $N(q)$ einfache *reelle* Nullstellen enthält, dann ist das uneigentliche Integral nicht wohldefiniert, aber dessen Hauptwert schon. Wie muss die rechte Seite in obiger Relation für den Hauptwert
   $$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx$$
   geändert werden. (Wenn q die einfachen reelle Nullstelle $x_1, \ldots, x_n$ hat, dann ist der Hauptwert der Limes $r \to 0$ des Integrals über $\mathbb{R} \backslash \bigcup_{i=1}^n (x_i - r, x_i + r)$).
2. Bestimmen sie
   $$P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^3 - x} dx.$$