Übungsblatt 08

Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 21. Juni – 25. Juni 2010
Abgabe: spätestens Freitag, 18. Juni 2010, 10:00 Uhr
in die Box "Funktionentheorie" im Gebäude L1

Aufgabe 1

1. Geben Sie die Nullstellenmenge der folgenden reellen Funktion an:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right),$$

   Der Funktionswert bei $x = 0$ sei durch stetige Fortsetzung bestimmt.

2. Ist die analytische (d.h. holomorphe) Fortsetzung dieser Funktion nach $\mathbb{C}$ ein Gegenbeispiel zum Satz üder die Isoliertheit von Nullstellen holomorphen Funktionen?

3. Bestimmen Sie die Ordnung der Nullstellen der holomorphen Funktion.

Aufgabe 2

1. Bestimmen Sie das Maximum der ganzen Funktionen $\sin(z)$ und $\cos(z)$ auf der Kreisscheibe $B_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$.

2. Zeigen Sie, dass doppelt periodische ganze Funktionen, d.h.

$$f(z + z_1) = f(z + z_2) = f(z)$$

   mit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\times$ und $z_1/z_2 \notin \mathbb{R}$, notwendigerweise konstant sein müssen.

Aufgabe 3

1. Zeigen Sie, dass für eine nicht-konstante ganze Funktionen f gilt:

$$\forall w \in \mathbb{C},\ \forall \epsilon > 0 :\ \exists z \in \mathbb{C},\ \text{sodass } |f(z) - w| < \epsilon,$$

   d.h. jeder Punkt $w \in \mathbb{C}$ ist beliebig nahe an einem Punkt im Bild von f.

2. Geben Sie ein Gegenbeispiel für die stärkere Behauptung, dass jede nicht-konstante ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv sei, an.

Aufgabe 4 Verwenden Sie die verallgemeinerte Cauchysche Integralformel um das Wegintegral

$$\int_\gamma \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}dz$$

entlang des folgenden Weges zu bestimmen: