Übungsblatt 07

Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 14. Juni – 18. Juni 2010
Abgabe: spätestens Freitag, 11. Juni 2010, 10:00 Uhr
in die Box "Funktionentheorie" im Gebäude L1

Aufgabe 1

1. Es sei $f : B_r^o(z_0)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ holomorph mit Laurentreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-z_0)^n$. Zeigen Sie, dass f in z_0 genau dann
   - eine hebbare Singularität hat, wenn $a_n = 0$ für alle $n < 0$,
   - ein Pol der Ordnung k hat, wenn $a_{-k} \neq 0$ und $a_n = 0$ für alle $n < -k$,
   - eine wesentliche Singularität hat, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele $n < 0$.
2. Gegeben sei $G \subset \mathbb{C}$ offen und $\mathcal{M}(G, \mathbb{C})$ sei die Menge aller meromorpher Funktionen auf G. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}(G, \mathbb{C})$ ein Körper bzgl. Addition und Multiplikation ist.
3. Weiters sei $z_0 \in G$, $f \in \mathcal{M}(G, \mathbb{C})$ eine meromorphe Abbildung und $\nu_{z_0} = \nu_{z_0}(f) \in \mathbb{Z}$ die Ordnung von f in z_0 (d.h. $f(z) = (z-z_0)^{\nu_{z_0}} g(z)$ mit $g(z_0) \neq 0$). Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\nu_{z_0} : (\mathcal{M}(G, \mathbb{C}), \cdot) \to (\mathbb{Z}, +), f \mapsto \nu_{z_0}(f)$$
ein abelscher Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 2 Sind folgende Funktionen meromorph auf $\mathbb{C}$? Bestimmen Sie die Lage der Nullstellen, der Pole bzw. der wesentlichen Singularitäten.

1. $f(z) = \tan(z)$,
2. $f(z) = \frac{\sin(z)}{\sinh(z)}$
3. $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$,
4. $f(z) = e^{\frac{1}{1+z^2}}$

Aufgabe 3 Für die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Abbildung
$$f(z) = \frac{2z-1}{z(z-1)(z-2)}$$
bestimme man die Laurentreihenentwicklung um den Pol bei $z = 2$ für

1. $0 < |z-2| < 1$,
2. $1 < |z-2| < 2$,

3. $|z-2|>2$.

Hinweis: Verwenden Sie eine Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 4

1. Bestimmen Sie alle ganzen Abbildungen $f(z)$, die auf der Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \log(1-1/n), n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ durch folgende Werte gegeben sind:

$$f\big(\log(1-1/n)\big) = \frac{n^2-n+1/2}{n^2-n}.$$

2. Gegeben diese ganze Funktion, bestimmen Sie alle ganzen Abbildungen $g(z)$, sodass $f(z)-g(z)$ ein lokales Maximum im Ursprung hat.