Übungsblatt 06

Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 7. Juni – 11. Juni 2010
Abgabe: spätestens Freitag, 4. Juni 2010, 10:00 Uhr
in die Box "Funktionentheorie" im Gebäude L1

Aufgabe 1 Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f : G \to \mathbb{C}$ und deren maximalen Definitionsbereich $G \subset \mathbb{C}$, sodass $(z = x + iy)$

1. $\mathrm{Im} f(z) = (2x + 1)y$,
2. $\mathrm{Im} f(z) = \frac{y}{(1-x)^2+y^2}$.

Im folgenden ist die Einschränkung einer holomorphen Funktion auf $\mathbb{R}$ gegeben, d.h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Bestimmen Sie (i) die holomorphe Funktion und deren maximalen Definitionsbereich $G \subset \mathbb{C}$ und (ii) die Einschränkung dieser holomorphen Funktion auf $(i\mathbb{R}) \cap G$, d.h. auf die imaginäre Achse in der Gaußschen Zahlenebene.

3. $f(x) = \tanh(x)$,
4. $f(x) = \log(1 + x^2)$.

Aufgabe 2

1. Die lokale Umkehrabbildung $\arcsin(z)$ der trigonometrischen Funktion $\sin(z)$ (in einer Umgebung des Ursprungs) ist die Stammfunktion welcher holomorphen Funktion?
2. Zeigen Sie, dass der Arcussinus in einer Umgebung des Ursprungs gegeben ist durch
$$\arcsin(z) = -i \log\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right),$$
wobei mit $\log(z)$ und $\sqrt{z}$ die jeweiligen Hauptzweige gemeint sind.

Aufgabe 3 Der Konvergenzradius R einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ kann mit Hilfe der Formel von Cauchy–Hadamard, $R = 1/\left(\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)$, ($\overline{\lim}$ ist der Limes superior) oder aus dem Quotientenkriterium mit $R = \lim_{n\to\infty} |a_n|/|a_{n+1}|$ (falls $\exists N \in \mathbb{N}$: $a_n \neq 0$ für alle $n > N$) berechnet werden. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius für

1. die Potenzreihen:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^3 + n}{5n^3 - 23n^2}\right)^n z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n (2n)!} z^n.$$

2. die hypergeometrische Reihe mit $a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$:

$$F(a, b, c, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!},$$

wobei $(d)_n := d(d+1)\dots(d+n-1)$. Was passiert, wenn a (oder b) eine nicht-positive ganze Zahl ist?

3. die Potenzreihen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 z^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{n!}\ z^{n!},$$

wobei $R > 0$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ist.

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(z) = 1/z^n$ für $n \in \mathbb{N}$ bzgl. eines Punktes $c \in \mathbb{C}^\times$ und deren Konvergenzradius. Kann der Konvergenzradius ohne explizite Berechnung der Taylorreihe angegeben werden?

(b) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\} \to \mathbb{C}$,

$$f(z) = \frac{\exp(p(z))}{z(z-1)(z-2)},$$

mit beliebigem Polynom p. Bestimmen Sie den Konvergenzradius für die Taylorreihe von f zunächst bzgl. der drei Punkte $-2, 1+i, 3-i$ und dann bzgl. eines beliebigen Punktes $c \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, 2\}$.