Übungsblatt 04

Funktionentheorie, Sommersemester 2010

Woche: 17. Mai – 21. Mai 2010
Abgabe: spätestens Freitag, 14. Mai 2010, 10:00 Uhr
in die Box "Funktionentheorie" im Gebäude L1

Aufgabe 1 Sind die folgenden Untermengen von $\mathbb{C}$ Gebiete?

1. $U_1 = B_1^o(-1) \cup B_1^o(1)$, mit der offenen Kreisscheibe $B_r^o(c) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - c| < r\}$.
2. $U_2 = B_1^o(-1) \cup B_1^o(1) \cup \{0\}$.
3.*) $U_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid z^2 \in B_r^o(1)\}$. Unterscheiden Sie $0 < r \leq 1$, $r > 1$.
4.*) $U_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid e^z \in B_r^o(1)\}$. Unterscheiden Sie $0 < r \leq 1$, $r > 1$.
5. $U_5 = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z| < R\}$ für $0 < r < R$.

*) Aufgaben zum Knobeln! (Hinweis: Verwenden Sie die Stetigkeit der Abbildungen $z \mapsto z^2$ bzw. $z \mapsto e^z$.)

Aufgabe 2 Berechnen Sie die Wegintegrale

$$\int_\gamma e^z dz, \qquad \text{und} \qquad \int_\gamma |z|^2 dz,$$

jeweils entlang folgender Wege:

1. Der erste Weg sei eine Gerade, die den Ursprung 0 mit einer beliebigen komplexen Zahl $a \in \mathbb{C}$ verbindet. Die Parametrisierung sei gegeben durch

   $$\gamma = \gamma_{a,n} : [0,1] \to \mathbb{C}, t \mapsto at^n,$$

   wobei $n \in \mathbb{N}$. Hängen die Ergebnisse der Wegintegration von beiden Parametern, a und n, ab? Erklären Sie warum ja oder nein?

2. Der zweite Weg setze sich zusammen aus zwei stückweise stetigen Wegen, $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$. Der erste gehe vom Ursprung 0 entlang der reellen Achse bis $\mathrm{Re}(a)$ und der zweite laufe von dort parallel zur imaginären Achse bis zum Punkt a.

Besitzen die komplexen Funktionen $f(z) = e^z$ und $f(z) = |z|^2$ eine Stammfunktion auf $\mathbb{C}$? Warum?

Aufgabe 3 Berechnen Sie das Wegintegral

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz$$

entlang des Randes eines beliebigen Dreiecks in $\mathbb{C}$, das den Ursprung als inneren Punkt enthält. Untersuchen Sie dazu zuerst, wo in $\mathbb{C}$ die Funktion $f(z) = 1/z$ holomorph ist, und verwenden Sie diese Eigenschaft, um das Wegintegral zu berechnen.

(Hinweis: Das Integral ist besonders einfach zu lösen, wenn der Weg entlang des Randes einer Kreisscheibe $B_r^o(0)$ gewählt wird.)

Welches Ergebnis ($= 0$ oder $\neq 0$) erwarten Sie für die Integration der Funktionen $f(z) = z^n$ (entlang des selben Weges) mit $n \in \mathbb{Z}$ für (a) $n > -1$ bzw. (b) $n < -1$? Überprüfen Sie Ihre Erwartung.

Aufgabe 4 Berechnen Sie die folgenden Wegintegrale entlang des Randes der Kreisscheibe $B_r^o(0)$.

1. $$\int_{\partial B_r^o(0)} \frac{\sin z}{z} dz \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial B_r^o(0)} \frac{\cos z}{z} dz.$$

   (Hinweis: Verwenden Sie die Reihenentwicklungen der trigonometrischen Funktionen. Was müssen Sie dabei beachten.)

2. Der Logarithmus ist wohl-definiert als Abbildung $\log : \mathbb{C} \to \mathcal{S}_a = \{w \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Im}(w) \leq a + 2\pi\}$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $\log : z \mapsto \log |z| + i \arg(z)$, wobei die 2π-Ambiguität des Arguments durch die Wahl des Intervals $\arg(z) \in (a, a + 2\pi]$ fixiert wurde. (Sehr oft wird $\mathcal{S}_{-\pi}$ verwendet.) Berechnen Sie

   $$\int_{\partial B_r^o(0)} \log(z) dz.$$

   Wirkt sich die Wahl von a auf das Wegintegral aus? (Hinweis: Es ist hilfreich die Parametrisierung des Weges an die Wahl des Intervals $(a, a + 2\pi]$ anzupassen.)